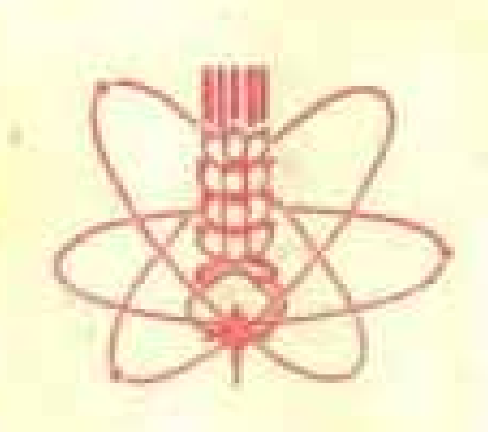
# 十万个为什么

# SHI WAN GE WEISHENME



书　号：13·4·51
定　价：0.45元

# 十万个为什么

上海人民出版社

**十万个为什么(1)**

上海人民出版社出版
(上海绍兴路5号)
云南人民出版社重印
云南人民印刷厂印刷　云南省新华书店发行

开本787×1092 1/32　印张8.25　字数139,000
1970年9月第1版　1972年10月第2版
1972年11月昆明第1次印刷

书号：13·4·51　定价：0.46元

# 重版说明

《十万个为什么》这套书（1962年第一版，1965年修订本），过去在叛徒、内奸、工贼刘少奇的反革命修正主义文艺黑线和出版黑线的影响下，存在着不少错误，没有积极宣传马克思主义、列宁主义、毛泽东思想，脱离三大革命运动实际，不少内容宣扬了知识万能，追求趣味性，散布了封、资、修的毒素。在伟大的无产阶级文化大革命运动中，广大工农兵和红卫兵小将，对这套书中的错误进行了严肃的批判，肃清修正主义文艺黑线和出版黑线的流毒。

最近，在有关部门的大力支持下，我们将这套书进行了修订，重版发行。这次修订重版时，删去了错误的内容，同时，增加了大约三分之一的新题目．遵循伟大领袖毛主席关于**“自力更生”“奋发图强”“备战、备荒、为人民”**的教导，反映三大革命运动和工农业生产实际，反映文化大革命以来我们伟大祖国在科学技术方面的新成就，使科学普及读物为无产阶级政治服务。

由于我们认真学习马列主义、毛泽东思想不够，可能存在着不少缺点和错误，我们诚恳地欢迎广大工农兵和青少

年读者提出批评意见，帮助我们搞好斗、批、改，遵照伟大领袖毛主席关于"认真作好出版工作"的教导，更好地为工农兵服务。

上海人民出版社

一九七〇年八月

# 目　录

# 为什么我们计数和记数的方法大都是十进位制的?

伟大领袖毛主席教导我们:“**胸中有‘数’。这是说,对情况和问题一定要注意到它们的数量方面,要有基本的数量的分析。**”我们在阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命运动中,必须注意事物的数量方面,才能把事情办好。譬如,生产队长在分配劳动任务时,必须根据农活的种类和数量,统计出勤的劳动力有多少,一、二、三等劳动力各有多少、男女劳动力各有多少等等,然后结合各人的具体情况,适当组织劳动力,充分发挥每一个人的作用,以便高质高产地完成劳动任务。

我们在计数的时候,从一、二、三、四、五、六、七、八、九到十,一共创造了十个数字,从十以上,就是十一、十二、十三……一直要到一百,才用上一个新的数位“百”,而一百刚刚是十个十。从一百以上,要到一千才用上一个新的数位

"千"，而一千刚刚是十个百，如此等等。这样的计数法，叫做十进位计数法。

同样地，我们在记数的时候，也只用了十个数字，那就是：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9。比 9 大 1 的这个数十，用 10 来表示，从 11、12、13……到 19 很容易记；比 19 大 1，又要进位变成 20。到 99 以后，又进位变成 100。这样的记数法，叫做十进位记数法。

为什么我们的计数法和记数法都是十进位制的呢？这是不是偶然的事呢？

毛主席教导我们："**人的认识，主要地依赖于物质的生产活动**"。知识是从实践中产生的，我们的计数法和记数法也不例外。回溯一下人类社会的发展史，我们就能回答上面的问题。

由于古代的人类在打猎捕鱼时，在生产劳动和分配的过程中，都需要计数。那时候的数量一般比较小，所以他们开始时总是用手指头来计算的。古书上有一句成语，叫做"屈指可数"，可见当时较简单的数是用"屈指"（就是扳指头）来计算的。其实直到现代，幼儿园的小朋友，在开始学习计数



的时候，也往往还用“屈指”来计算哩 这是最方便的计算个数的工具，也是随身携带的“计算机”。当渔猎技术进一步熟练，生产工具得到改进，生产数量不断提高以后，数量超出了十个，单纯的“屈指计数”就不能适应了，怎么办呢？

毛主席指出：“**马克思主义者认为人类社会的生产活动，是一步又一步地由低级向高级发展，因此，人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展**”。古代人类的“屈指计数”，也是随着生产力的发展，而由低级的阶段（即单纯的“屈指计数”）向高级的阶段发展。人们在“屈指计数”满十以后，不得不把两只手的手指全部重新伸直，在地上放一块小石头或者短树枝等其他东西，再继续“屈指计数”，以后每满一次十，就记一块小石头（或其他东西），一直到数完为止，这是“屈指计数”的第一步。为了得到计数的结果，还要把小石头数一下，这是“屈指计数”的第二步。比方说，第一步中最后一次“屈指计数”的结果是“五”，而第二步“屈指计数”的结果是“三”，那么得数就是“三十五”。如果数量更多一些，小石头就可能超过十颗，“屈指计数”时就会超过两步。譬如说，数二百六十三个东西，就要分成三步。古代的人类经过许多次这样的反复计算后，总结了经验，就创造出十进位制的计数法了。

至于记数的制度，它必然是和计数的制度相互配合的，

因为满十以后，放了一块小石头或其他东西，而指头全部伸直，所以记数的数码，就只要从1到9。满十的十字，自从有了0字以后，可以用10来表示，这样就完全够用了。

这样看来，十进位制的计数法和记数法，是古代人类从劳动生产的实践中，积累经验、总结经验而创造出来的，它的产生和人的十个指头有密切的关系，而不是偶然的事。

是不是还有不用十进位的地方呢？过去我国所用的杆秤，就不是十进位的，它是以16两作为1斤的。计算起来比较麻烦，因此现在全国都改用10两制了。国外有些地方，在计算某些东西时，还有用十二进位制的。如铅笔12枝叫做一“打”，12打叫做一“箩”。此外，也有用六十进位制的，如计算时间和角度时，就以60秒为1分，以60分为1度。

用十进位制来计数和记数都很方便。手摇计算机和电动台式计算机，数的运算也是用十进位制。但是，也有的计算工具不用十进位制，如算盘中横档以上的算珠，一颗算珠就表示5，这是采用了五进位制记数。而现代出现的电子计算机，数的运算则是采用二进位制。因为电子计算机没有手，没有十个指头，它只有两种情况，一种是“通电”，一种是“断电”，只要用0和1这两个数码，根据通电、断电两种不同情况，就可以自动运算了。由此可知，进位制也是随着客观条件的变化，而决定采用哪一种比较方便。

# 为什么电子计算机要用二进位制?

用十进位制来记数和运算，大家都很熟悉。十进位制中所用的位率是逢十进一，它们是“个”位、“十”位、“百”位、“千”位……；一共有0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，十个数码。用上面的位率和数码，就可以写出任何数值的数。这就是说，任何一个数，都可以写成这十个数码与位率（10的整数次幂）乘积的和。例如：

185＝1个“100”＋8个“10”＋5个“1”；

或者写成为：$185=1\times10^2+8\times10^1+5\times10^0$。

二进位制是怎样的呢？二进位制所用的位率是逢二进一，它们是“1”位、“2”位、“4”位、“8”位、“16”位……。二进位制里一共只有两个数码——0和1。用这些位率和数码，也可以写出任何数值的数。也就是说，任何一个数，都可以写成这两个数码与位率（2的整数次幂）乘积的和。例如：$185_{十进}$这个数，在二进位制中就写成为：

10111001＝1个“128”＋1个“32”＋1个“16”＋1个“8”＋1个“1”；

或者写成

$$10111001=1\times2^7+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^0。$$

这样，十进位制中的0—9十个数码，在二进位制里就

变成下表中的形式:

| 十进位制 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | …… | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 二进位制 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | …… | 1100100 |

从这个表来看,二进位制的一个数,写出来较长,稍大一些的数更是长长的一大串,看起来也不习惯,用起来岂不麻烦吗? 为什么电子计算机要采用二进位制呢?

毛主席教导我们:“**看问题要从各方面去看,不能只从单方面看。**”二进位制的确有缺点,但是也有优点,它只有两个基本数0和1,这就是一个很大的优点。也就是说,只要找到有二种稳定状态的元件,就能用来表示二进位制的数了。在自然界中具有两种稳定状态的元件是很多的,譬如电灯的“亮”与“暗”,晶体管的“通导”与“截止”,双稳态电路的“高电位”与“低电位”,“门”电路的“有脉冲”与“无脉冲”,磁性材料的“正剩磁”与“负剩磁”,纸带的“有孔”与“无孔”,开关的“开”与“关”……。如果要具有三种、四种稳定状态的元件那就很少了,要具有十种稳定状态的元件就更难发现了。这也就是电子计算机为什么要采用二进位制,而不用十进位制的主要原因。

其次,采用二进位制还能使计算简单化。例如,用二进位制做加法,对每一位来说,只有4种情况: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$。而十进位制加法就有100种





情况：0+0=0、0+1=1，……、0+9=9，1+0=1，……，9+0=9，……，9+9=18。做减法、乘法、除法也是一样，二进位制只有4种情况，十进位制仍有100种情况。当然，满足4种情况，要比满足100种情况简单得多了。由于算法简单，这也就使运算器的结构大大简单了。

第三，二进位制只有0和1两个基本数，在具体数字中出现"0"的机会，就比十进位制数中的"0"多得多（二进位中，不是0就是1；十进位中，不是0，还可能是2、3、……9，）。我们知道，在做乘法或除法时，对于有"0"的运算可以速算，同样道理，这对二进位制加快计算速度也是有好处的。

因此电子计算机采用二进位制，不仅具有现实意义，而且还有一定的有利条件。

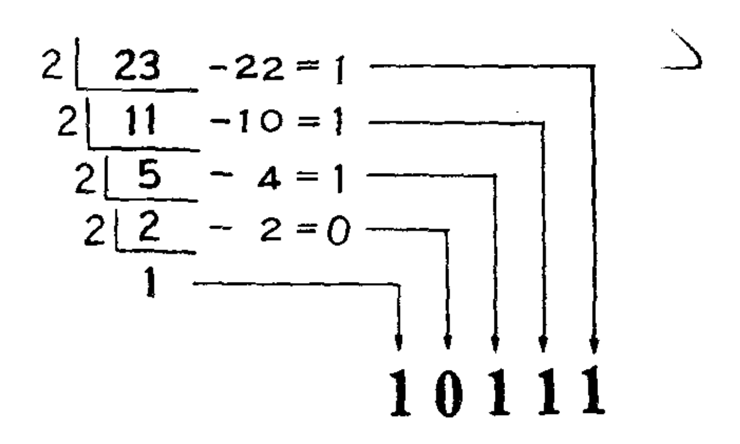
## 十进位制与二进位制是怎样换算的?

平时，人们习惯用的是十进位制的数，而电子计算机运算是用二进位制的数。一个题目经过电子计算机运算后所得到的答案，我们希望仍用十进位制表示出来，因此这里就存在一个相互转换的问题。那么，十进位制的数怎样换算成二进位制的数？二进位制的数又怎样化成十进位制的数呢？

(一)我们先看看十进位制的整数，是怎样转换成二进位制的整数的？（整数 10⟶2）：

1．将一个十进位制的整数，转换成二进位制时，只要不断地“用 2 来除”，每次所得的余数（必为 0 或 1 ）挨次排列起来，就是自低位到高位的二进位制的整数。

例如：十进位制的 23，相当于二进位制的多少？




∴ $23_{十进}=10111_{二进}$。

2．利用 $2^n$ 及其十进位制数的对照，也可以转换。下面是 $2^n$ 及其对应的十进数表：

| | …… | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | =23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | …… | $2^{10}$ | $2^9$ | $2^8$ | $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | |
| 十进数 | …… | 1024 | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | |

假设要化的数为 $S$，我们只要拿 $S$ 与表中的十进数相比，凡是大于 $S$ 的那些位上的二进位制值必为 0；找到小于

$S$又最接近$S$时，该位上的二进位制值必为1，再将$S$减去这个十进数，其差再按上述规则去算。这样一直比下去，就能求出$S$的二进位制的数了。

例如：$23_{十进}$相当于二进位制的多少？

因为$23<32$，在$2^5$位以上的二进数必为0，而$16<23$，又最接近23，所以$2^4$位上的二进数为1；再求出$23-16=7$。

因为$4<7$又最接近7，所以$2^2$位上的二进数也为1；再求出$7-4=3$。

因为$2<3$又最接近3，所以$2^1$位上的二进数也是1。$3-2=1$，正好是$2^0$，所以$2^0$位上的二进数也是1。拼起来就得到000010111，也就是10111。

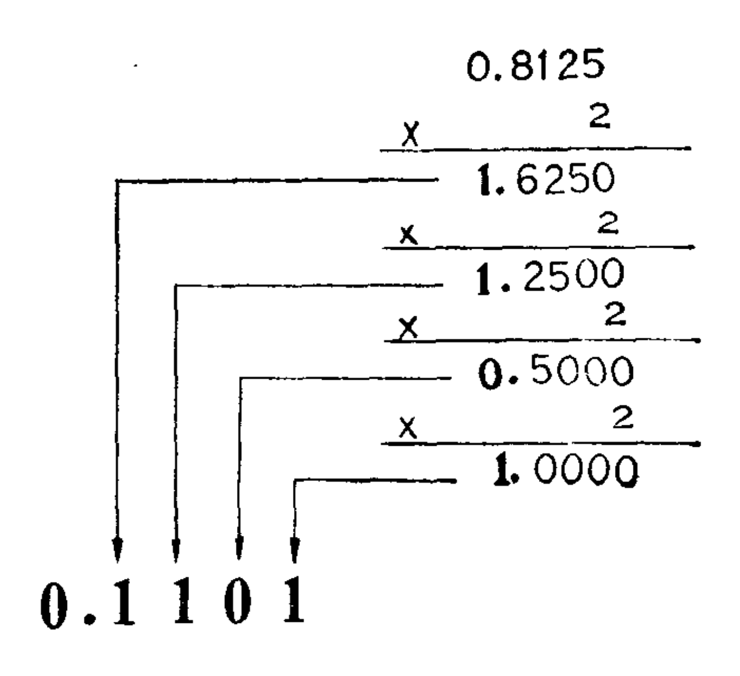
$$\therefore\ 23_{十进}=10111_{二进}。$$

用惯以后，这个方法对于换算庞大的十进数是很方便的，而这一表格又可以随时列出来。

（二）十进位制的小数怎样化成二进位制的小数呢？（小数10⟶2）

1．将一个十进位制的小数，要化成二进位制的小数时，只要不断以2去乘，每次所得之整数（必为0或1）挨次排列起来，就是从高位到低位的二进位制的小数。（注意：每次以2去乘时，必须只乘小数部分。）

例如：$0.8125_{十进}$等于二进数多少？




∴ $0.8125_{十进}=0.1101_{二进}$。

2．利用 $2^{-n}$ 及其对应的十进数表(即下表)的对照，也可以转换，其具体方法与整数转换的第二种方法完全一样。

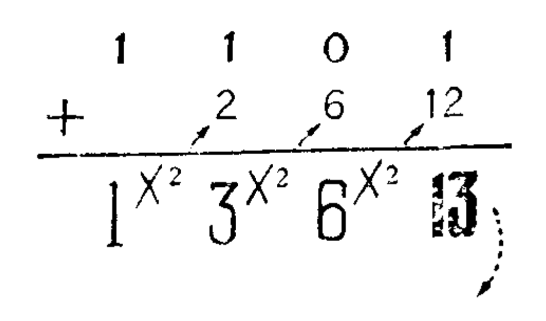
| $2^{-n}$ | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | $2^{-4}$ | $2^{-5}$ | $2^{-6}$ | $2^{-7}$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 十进数 | 0.5 | 0.25 | 0.125 | 0.0625 | 0.03125 | 0.015125 | 0.0075625 | …… |

(三)二进位制的整数，怎样转换成十进位制的数呢?(整数 2⟶10)：

1．上面介绍了十进位制整数换算成二进位制整数的方法(整数10⟶2)，用它的逆运算，就可得到由二进位制整数换算成十进位制整数(整数2⟶10)的方法，其步骤如下：

将要转换的二进位制的数，自高位开始，不断地“乘以2，将其积加在其低一位的数上”，最后所得的数，就是该二进位制数所对应的十进位制的数。

例如：$1101_{二进}$ 等于十进数多少?



∴　　　　$1101_{二进}=13_{十进}$。

2. 以 $2^n$ 所对应的十进数（见第 8 页的表）相加，就可得到十进位制的数。

例如：$1101=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

$=8+4+0+1$

$=13$。

（四）二进位制的小数，怎样转换成十进位制的小数呢？（小数 2⟶10）：

1. 前面讲了十进位制小数，换算成二进位制小数的方法（小数 10⟶2），其逆运算就是二进位制小数化成十进位制小数的方法（小数 2⟶10）：

先把要化的二进位制小数，自低位开始，不断地“除以 2，将其商加到高一位的数上”，最后再除以 2，其所得之数就是十进位制的小数。

例如：$0.1101_{二进}$ 等于十进数多少？

| | 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| + 0.8125 | 0.625 | 0.25 | 0.5 | |
| | 1.625 ÷2 | 1.25 ÷2 | 0.5 ÷2 | 1 ÷2 |

∴　　$0.1101_{二进}=0.8125_{十进}$。

2. 以 $2^{-n}$ 所对应的十进数（见第 10 页的表）相加，也可得到十进位制的小数。

例如：$0.1101 = 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4}$

$= 0.5 + 0.25 + 0 + 0.0625$

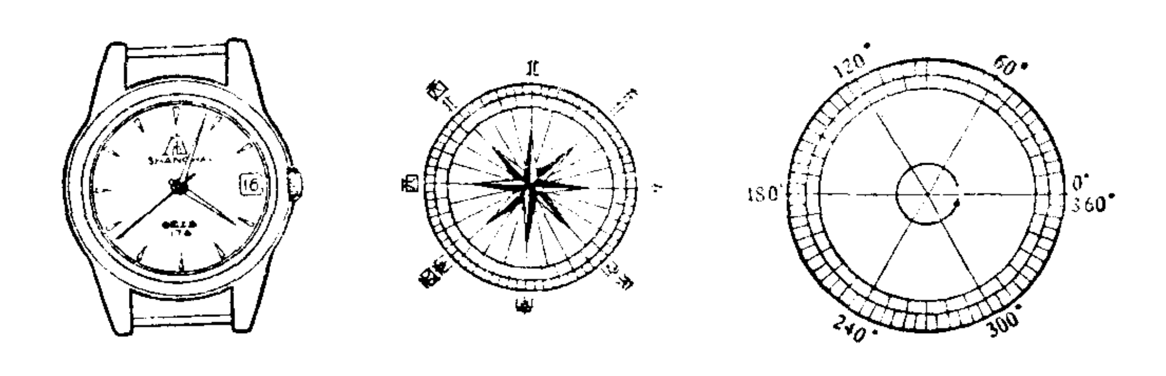
$= 0.8125$。

电子计算机在运算时，要把十进位制转换成二进位制，最后又要把二进位制化成十进位制，这岂不麻烦吗？事实上，这工作人们可以安排电子计算机去自动完成，因此使用起来还是非常方便的。

## 为什么时间和角度的单位都用60进位制?

时间的单位是小时，角度的单位是度，从表面看起来，它们好象是两种完全没有关系的量。可是，为什么它们都分成分、秒等名称相同的小单位呢？为什么又都是用 60 进位制呢？

我们仔细研究一下，就知道时间和角度这两种量的关系是十分密切的。原来它们都是古代人民由于生产劳动的需要，要研究天文和历法，就牵涉到时间和角度了。譬如研究昼夜的变化，就要观察地球的自转，这里自转的角度和时




间是紧密地联系在一起的。因为历法需要的精确度是较高的，时间的单位“小时”，和角度的单位“度”都嫌太大，必须进一步研究它们的小数。

为什么又不用十进位制的小数，而用60进位制呢？由于小数的问题与整数问题不同，小数不是一个一个数起来的，不需要用指头来数。相反地，小数却是从等分产生的，所以它要求有这样的性质，就是使$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$都能成为它的整倍数。以$\frac{1}{60}$作为单位，就正好具有这个性质。譬如：$\frac{1}{2}=\frac{30}{60}$，即30个$\frac{1}{60}$；$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$，即20个$\frac{1}{60}$；$\frac{1}{4}=\frac{15}{60}$，即15个$\frac{1}{60}$等。因此这个小数的进位制，比起十进位制来，有它方便的地方，例如：$\frac{1}{2}$小时$=30$分；$\frac{1}{3}$度$=20$分；$\frac{1}{4}$分$=15$秒等；而在十进位制里$\frac{1}{3}$要变成无限小数，这样用“分”为单位，表示$\frac{1}{3}$“度”时就不方便了。

数学上习惯地把这个$\frac{1}{60}$的单位，用符号“′”(分)来表示；

而 1′ 的 $\frac{1}{60}$ 的单位,用符号“″”(秒)来表示。我们把 $\frac{1}{60}$ 叫做分,把 1 分的 $\frac{1}{60}$ 叫做秒。所以“分”只是表示一个单位的 $\frac{1}{60}$。“秒”是 $\frac{1}{60}$ 的 $\frac{1}{60}$ 的小数单位的名称。时间上是如此，角度上也如此。

这种 60 进位制的小数记数法,在天文历法方面已长久地为全世界人们所公认,所以也就一直沿用到今天。

## 为什么世界各国都通用阿拉伯数码?

世界上各个国家的文字都不相同，可是也有一种共同的文字，不需要翻译，大家都看得懂，这就是阿拉伯数码:0, 1, 2, ……9 等。

从历史上看,各个国家曾经用过其他各种数码,有些还曾经在不少的国家里盛行一时。譬如说，欧洲各国就曾经盛行过罗马数码。那么，为什么现在世界各国都通用阿拉伯数码,而其他各种数码,包括罗马数码在内都逐渐淘汰了呢?

毛主席教导我们:“**你对于那个问题不能解决么?那末,你就去调查那个问题的现状和它的历史吧!**”毛主席又说:“**事物发展的根本原因,不是在事物的外部而是在事物的内部,在于事物内部的矛盾性。**”我们只要研究一下有关的历

史，从阿拉伯数码以及其他数码的本身就可以找到问题的答案。

阿拉伯数码的产生，必须具备两个条件，一个是十进的位值记数法。所谓位值记数法，是指任何一个数码代表的值，依据它的位置而定，例如175，最右面5就是五，右面第二位的7就不是七而是七十，第三位1就是一百。另一个是应用笔算。

我国古代也是采用十进位值制记数的，很早就有了一、二、三、……九、十、百、千、万等方块字，对十进位值制记数也很方便，但是我国古代的数字计算是用筹算，到十四世纪以后又发明珠算，它们分别用算筹和算珠进行计算，而不用笔算，因此当时不需要数码。

十三世纪以前，欧洲各国虽盛行罗马数码，但现在用得较少，不过有的钟表上和书上，有时还能见到罗马数码：Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ、Ⅹ、XI、XII 等，如果数字大一点，就不容易弄清楚了。

古代希腊和罗马虽然早就有了笔算，但记数不用位值制，例如：在罗马数码里“五”是采用数码“V”，而“五十”采用数码“L”，因而罗马数码和阿拉伯数码有很显著的差别。

由于采用十进的位值记数法，加上阿拉伯数码本身笔划简单，写起来方便，看起来清楚，特别是用来笔算时，使演

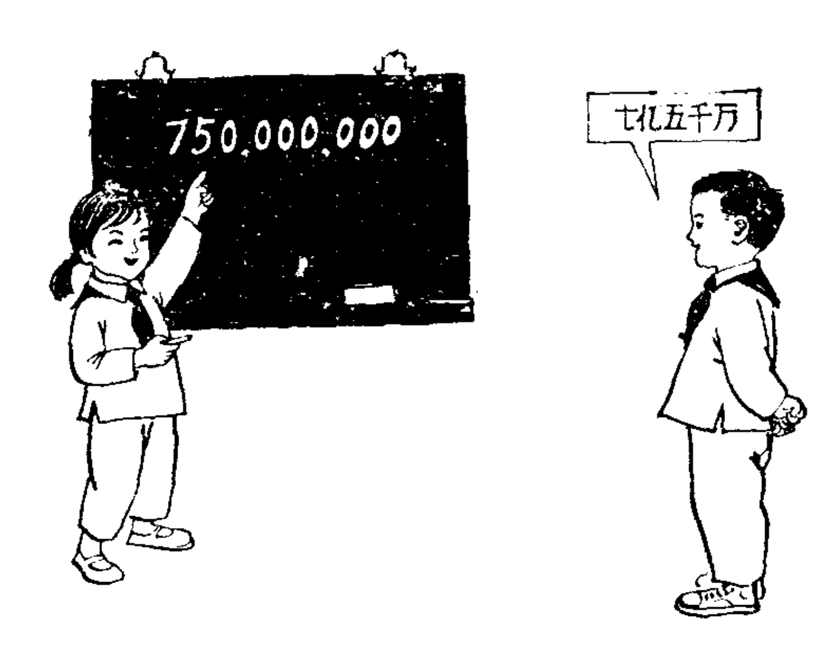
算很便利。因此随着历史的发展，阿拉伯数码逐渐在各国流行起来，以至成为世界各国通用的数码。

## 我国的读数法与记数法有什么不同？

在阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命运动中，我们经常会碰到一些数目，这些数目如果弄错了，就会贻误生产、影响工作、造成损失。譬如说，某一个工厂要进一种原材料，如果把数目弄错，成了原来的10倍，那就会造成大量的积压，这是一种变相的浪费。因此读数和记数必须正确，丝毫不能马虎。有人把 750,000,000 读成七亿万五千万，也有人读成七万五千万，实际上，这两种读法都是错误的。因此，我们有必要熟悉一下我国的读数法和记数法。

我国的记数法是十进位制，但是我国的读数法，却不完全是十进位制。在万以内的是十进，万以上的是万进。在以“万”、“亿”（万万）、“兆”（万亿）作为大单位时，还在大单位之间用万、千、百、十等小单位。我国数位的排列如下：

| 数位 | 万万万位 | 千万万位 | 百万万位 | 十万万位 | 万万位 | 千万位 | 百万位 | 十万位 | 万位 | 千位 | 百位 | 十位 | 个位 | 十分位 | 百分位 | 千分位 | 万分位 | 十万分位 | 百万分位 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 读法 | 兆 | 千亿 | 百亿 | 十亿 | 亿 | 千万 | 百万 | 十万 | 万 | 千 | 百 | 十 | 个 | 分 | 厘 | 毫 | 丝 | 忽 | 微 |




我国的读数法有两个原则：（1）几个数位单位连续排列时，较大单位在前，较小单位在后的，是相加关系。

例如：53,654 读成五万三千六百五十四，就是五万加三千加六百加五十再加四。

（2）较小单位在前，较大单位在后的是相乘关系，但在后的单位只能是“万”、“亿”、“兆”等大单位。

例如：360,000 读成三十六万，意思是三十六乘一万，而不是三十加六万。这个数一般不能读成三百六十千。

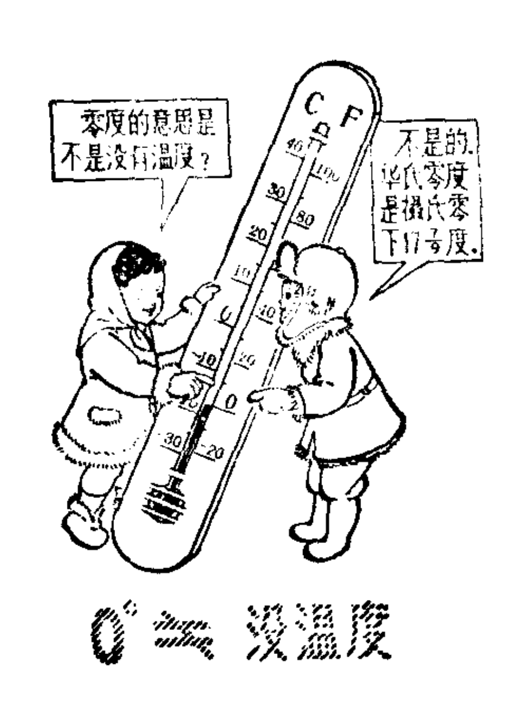
750,000,000 应该读作七亿五千万。

这种读数法，是我国传统的习惯。数字的读法既应该依照习惯上的统一的用法，但在具体场合上，也应该根据实际情况，作一些合理的灵活应用，因为法则总是服务于实践的。

# 0的意义是不是表示没有？

通常0是表示没有，但是它的意义是不是单表示没有呢？它除了表示没有以外，还表示什么呢？

在我们日常生活中，天气冷热经常变化，一般在冬天，气温大约在摄氏0度左右。摄氏0度是不是表示没有温度呢？当然不是，如果摄氏0度表示没有温度；而摄氏0度相当于华氏32度，难道华氏32度也表示没有温度吗？如果摄氏0度表示没有温度，又怎样理解相当于摄氏0下$17\frac{7}{9}$度的华氏0度呢？大家知道，摄氏0度比华氏0度的气温暖，也就是说，摄氏0度的温度高于摄氏0下$17\frac{7}{9}$度的温度。由此可见，我们不能简单地把0度看成是没有温度。




毛主席早就指出：**“在绝对真理的长河中，人们对于在各个一定发展阶段上的具体过程的认识只具有相对的真理性。”** 数学上的概念并不例外，也是相对的，不是一成不变的。0是用来表达量的，对它的认识，也随着量的概念在人类实践生活的发展中而发展。譬如说，你由某地向北走10

米。在你将行未行之际，0表示没有走动。但对10米的全路程来说，它又表示起点。如果在你向北走上10米的同时，我又从你的起点向南走上10米，两个距离同是10米，而方向相反。为了对这两个量加以区别，当把向北走的叫+10米时，那么向南走的就叫-10米，而0在-10与+10之间。温度也是如此，0度低于0上的温度，而高于0下的温度。所以0又被看成是介于正数和负数之间的数了。人们对于0的认识，正是这样随着实践一次又一次地向前，而一次又一次地深化的。

拿0的作用来讲，在加法运算中，任何数加上0，跟不加一样，这岂不是说，0毫无内容吗？

伟大导师恩格斯教导我们："**零是任何一个确定的量的否定，所以不是没有内容的。相反地，零是具有非常确定的内容的。**""**但是，任何一个量的无，本身还是有量的规定的，并且仅仅因此才能用零来运算。**"正因为如此，我们才能用零来同其他量进行加法的运算。特别是在几个因数相乘时，其中只要有一个因素是0，它们的乘积就是0。如果把0放在任何一个数的右边（按十进位制记数法），就使这个数增加了10倍。从这里也就明显地看出零的重要作用了。

值得提出的是：在除法运算中，0不能做为除数，这是数"0"所特具的本质。如果把"0"做除数，想一想，5÷0等于什么呢？因为任何数跟0相乘，只能得到0，而决不会等

于 5 。这就是说，除数是 0 的话，商是不存在的。或许我们会想到，$0\div 0$ 不是有无数个商吗？正是由于四则运算的结果应该保证是唯一的，所以 $0\div 0$ 又是没有意义的。仍然是说，除数是不可以为 0 的。对此，我们不能漫不经心，粗枝大叶，否则就有可能引出错误的结果。

请看下面的推演：

设 $a$ 和 $b$ 是两个相等的正数

$$a=b,$$

那么

$$a^2=ab,$$

$$a^2-b^2=ab-b^2,$$

$$(a+b)(a-b)=b(a-b),$$

$$a+b=b。$$

但

$$a=b,$$

即

$$2b=b,$$

$$\therefore\quad 2=1。$$

1 就是 1，2 就是 2，1 和 2 怎么会相等呢？请你考虑一下每一步的变换过程，看问题到底错在哪里？

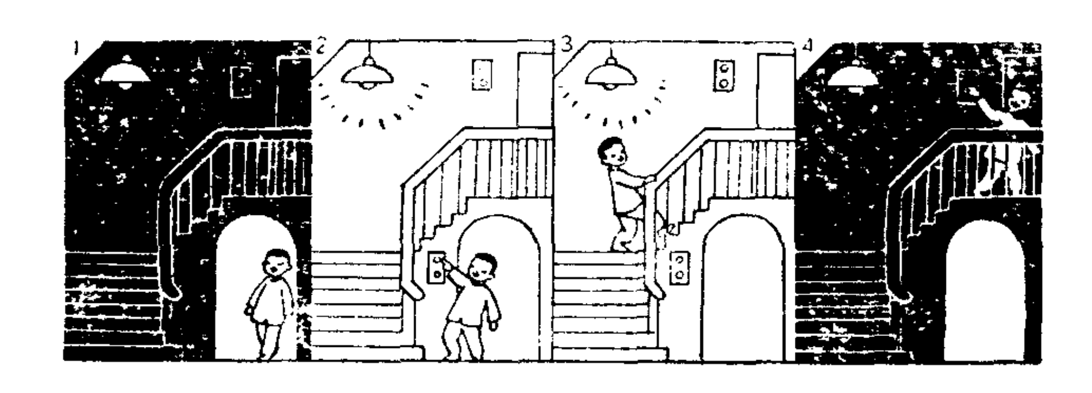
# 为什么电灯开关和灯亮的关系，也可以用数学式子表示出来？

在楼梯附近的电灯，我们常常在楼上、楼下各装一个双连开关。这样，在楼下开灯照亮了扶梯，人可以到楼上去把灯关掉。同样也可以在楼上开灯，而在楼下关灯。这种开关是怎么装的呢？

这种灯有两个双连开关，一个装在楼下，一个装在楼上。每个开关都有扳上和扳下两种情况。扳上的时候，电线和开关的上点接通，扳下的时候，就和下点接通。

把楼下、楼上两个开关的上点用电线连接起来，叫做上线；两个下点用电线连接起来，叫做下线，这样，楼梯开关就装好了。

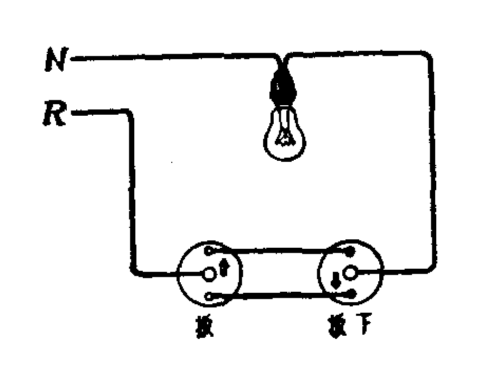
当两个开关都是扳上的情况下，电从上线通过，电灯就亮了。两个开关都扳下，电从下线通过，电灯也会亮。如果



是一上一下，那么不论上线或下线，电流都不通，当然灯就不亮。

原来楼梯开关的特点，就在于当电灯不亮时，两个开关总是处在一个是扳上、一个扳下的情况。因此不论在楼上或楼下扳一下，两个开关就变成同上或同下，电灯就亮了；再扳一下，又回到一上一下的情况，电灯又不亮了。所以两个开关就象一个开关那样方便。

毛主席教导我们：“**我们看事情必须要看它的实质，而把它的现象只看作入门的向导，一进了门就要抓住它的实质，这才是可靠的科学的分析方法。**”人们看到这个现象，就用数目字来代表各种情况。比如当电流接通了用 1 表示，不接通用 0 表示。灯亮用 1 表示，灯不亮用 0 表示。




楼下开关的上点的情况用 $x_{上}$ 代表，$x_{上}=1$，表示上点接通，也就是表示楼下开关扳上。$x_{上}=0$，表示上点不接通，也就是表示楼下开关扳下。

同样用 $x_{下}$ 表示楼下开关的下点的情况。$y_{上}$、$y_{下}$ 分别表示楼上开关的上点和下点的情况。

那么开关情况和灯亮情况 $z$ 的关系，就可以用

$$z=x_{上}\cdot y_{上}+x_{下}\cdot y_{下}$$

来表示，或是把它列成下表：

|  | 动作 | $x_上$ | $x_下$ | $y_上$ | $y_下$ | $z$ | 结果 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 同扳上 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 灯亮 |
| 2 | 同扳下 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 灯亮 |
| 3 | 楼下扳上<br>楼上扳下 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 不亮 |
| 4 | 楼下扳下<br>楼上扳上 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 不亮 |

这样，就很成功地把楼梯开关的各种情况，通过一个数学式，变成0和1这两个数的加法和乘法了，而开关竟与数学密切地联系起来了。

还有更复杂的开关，比如说三层楼的楼梯开关，火车站里几十条铁轨上的讯号灯的开关，就要用更复杂的“算式”去做。人们总是先根据实际需要，作出适当的对应关系，然后再把许多开关根据这个关系把各点接好，从而使数学知识为生产和生活服务。

## 电子计算机为什么能够算题?

很早以前，我国就有了算盘，它比笔算来得快而方便，以后又有了计算尺、手摇（或电动）计算机，它们比算盘算得更快。随着阶级斗争、生产斗争和科学实验的不断发展，这些计算工具还远远不能满足使用者的要求。近代的许多计算问题，不仅计算复杂、计算量大，而且计算速度要求非常

之快，这样的任务只能由电子计算机来完成了。

电子计算机是一门新兴的尖端科学，它在国防上和国民经济各个领域里起着很大的作用。在毛主席关于“**自力更生**”、“**艰苦奋斗**”方针的指引下，我国自1958年研制出第一台电子计算机以来，现已取得迅速发展，完全能够制造各种各样大大小小的电子计算机了。

计算机为什么能够算题？为了便于了解，不妨先看看人是怎样算题的。我们知道，各国发射第一颗人造卫星的重量如下表所示：

| 国别 | 重量（公斤） |
|---|---|
| 中国 | 173.00 |
| 苏联 | 83.60 |
| 法国 | 38.00 |
| 日本 | 9.40 |
| 美国 | 8.22 |

如果要算一算，我国第一颗人造卫星的重量，是其它四国第一颗人造卫星重量总和的几倍？

一般总是先将算式写在纸上，即：

$$\frac{173.00\text{公斤}}{(83.60+38.00+9.40+8.22)\text{公斤}}=?\text{（倍）}$$

然后将分母的四个数加起来，得到139.22公斤，最后做个

除法：

173.00 公斤 ÷ 139.22 公斤 = 1.24（倍）。

如果用算盘来算这个题目，需要些什么条件呢？

第一，要有一个算盘；

第二，写算式、数据及答案所用的纸；

第三，写算式、数据及答案的笔和手；

第四，指挥计算、写字的大脑。

事实上，电子计算机也具备这四个条件，它是由类似作用的四个部分构成的：

一、运算器（相当于算盘）；

二、存贮器（相当于纸）；

三、控制器（相当于人的大脑）；

四、输入和输出设备（相当于手和笔）。

电子计算机有了这四个部分，也就能够算题了。

运算器是完成具体计算任务的——四则运算和逻辑运算。它是根据控制器的命令，从存贮器取出所需要的数进行计算，算好的中间结果或答案，再送入存贮器存放起来。运算器是由双稳态电路（双稳态触发器）和各种“门”电路（与门、或门、反相门），按特定的各种逻辑构成的。

存贮器是存放数据和指令的。计算时，在控制器的控制下，接收输入设备送来的原始数据和指令，把计算所需的数及时送到运算器，等运算器算好中间结果或答案，就把它

们贮存起来；另外，还要把指令逐一送到控制器，最后把答案送到输出设备印刷出来。存贮器是由记忆元件（目前大多采用磁芯、磁带、磁鼓、磁盘或磁棒等）和电子线路组成。

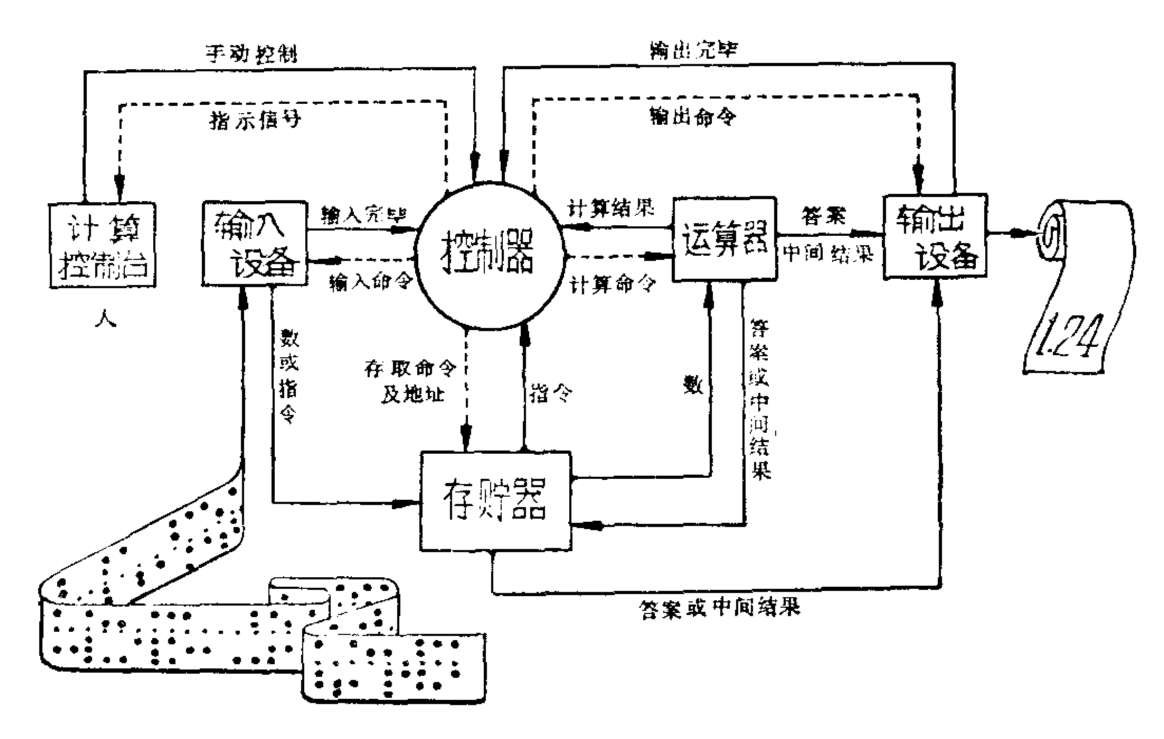
输入设备是专门送原始数据和指令到存贮器的。一般都采用光电输入设备；也就是先将数及指令穿成穿孔纸带，再通过光电设备，把纸带上的孔变成电信号送入存贮器。穿孔纸带上的孔，按其不同的组合，可以代表不同的数（0、1、2…9）或指令（加、减、乘、除），这就象电话一样，不同的电话号码，代表着各个工厂、公社、机关或学校等单位。

输出设备是将答案或所需要的中间结果，从存贮器（或直接取自运算器）取出来并显示在纸上，告诉算题的人。输出设备的种类很多，有快速打印机、电火花印刷机、静电印刷机、照相或绘图等等。

然而，运算器、存贮器、输入设备和输出设备，究竟是怎样相互联系来完成计算的呢？例如：数和指令该送到存贮器的什么地方？什么时候送？存贮器又该把哪里的数、指令分别送到运算器、控制器呢？又该什么时候送呢？运算器又怎样将答案送到存贮器或输出设备呢……。这一切全靠控制器来指挥了。控制器也是由双稳态电路和各种"门"电路组成的，不过，它只是组成控制逻辑，而不是运算逻辑。

控制器又如何来指挥呢？它只是根据人们事先编制好的"计算程序"来指挥的。

控制器同人又是怎样联系的呢？这就靠“计算控制台”了。它一般是由很多开关、指示设备组成的；主要是完成启动计算机和观察算题过程正常与否？各部件工作正常与否？




电子计算机工作原理图

这里我们仍以上面人造卫星的题目为例，再看看电子计算机是怎样进行具体运算的：

第一步是编制计算程序。也就是说，将

$x=\dfrac{173}{83.6+38+9.4+8.22}$化成依次计算的指令。所谓“指令”，就是指挥计算机进行各种动作的命令。每条指令都由操作码和地址码组成。“操作码”是以特定的数码来表示运算性质的；假若我们规定了“操作码”的对照表(如表一所示)，如“13”表示取数，“11”表示做加法，“10”表示存数，……。这

| 操作码 | 运算性质 |
| --- | --- |
| 13 | 取　数 |
| 11 | 加　法 |
| 10 | 存　数 |
| 14 | 除　法 |
| 05 | 印　刷 |
| 01 | 停　机 |
| 12 | 減　法 |
| ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ |

（表一）

就象电报一样，每个字是由规定的编码表示的。“地址码”是用数码来表示本次运算的数，放在存贮器的什么地方。实际上，每台计算机都有自己特定的对照表。为了便于理解，可以把存贮器分为“指令区”（这里以1～100号来表示）和“数据区”（101～200号）两部分。假设我们将已知数83.6、38、9.4、8.22、173依次放在数据区101～105号单元中。据算式，应先求出除数（即分母中四数之和）。第一条指令就是“取数”（取被加数83.6），而83.6这个数是放在101号的，所以第一条指令应该写成为

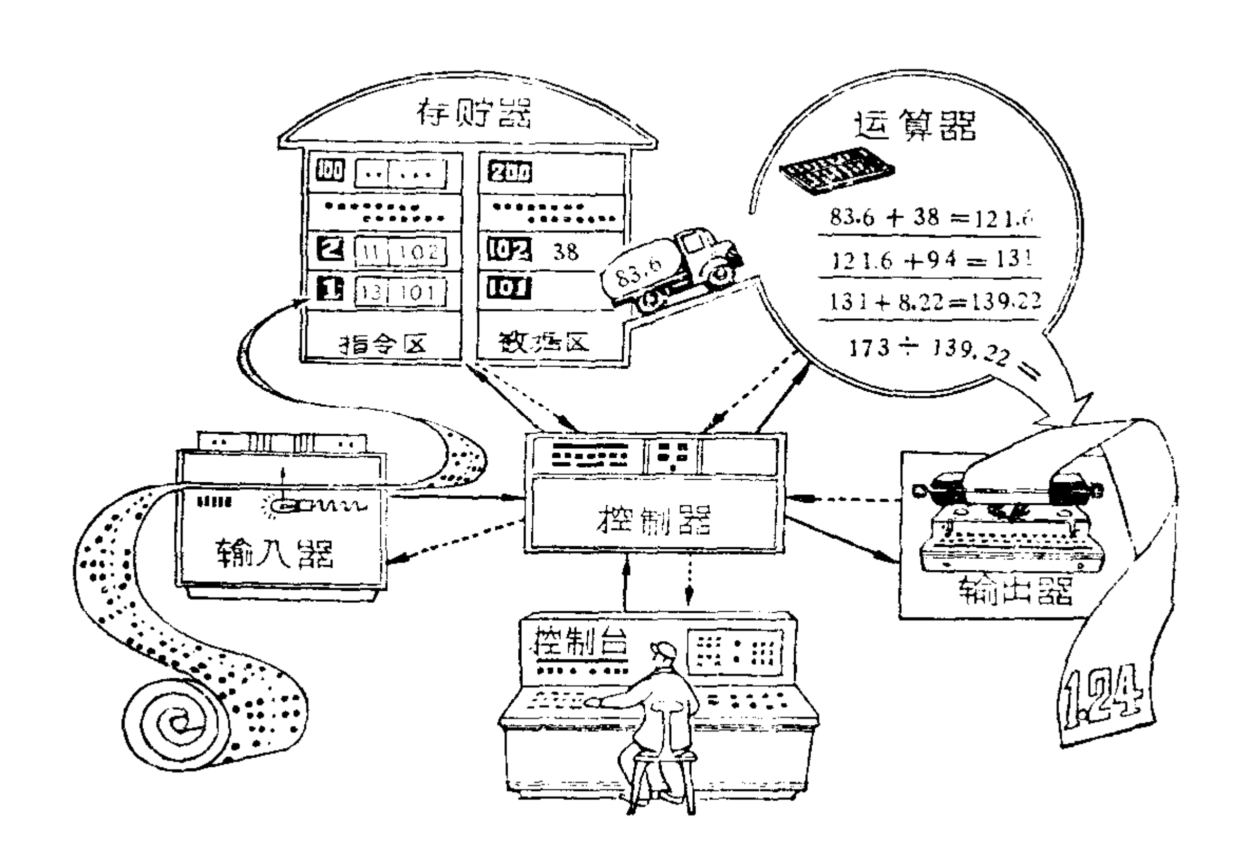
| 13 | 101 |
| --- | --- |
| 操作码 | 地址码 |

；接着做三次加法，则第二、三、四条指令为 [11 | 102]、[11 | 103]、[11 | 104]。把这求出来的除数存贮起来（假设存在106号），然后再取被除数做除法，于是第五、六、七条指令为 [10 | 106]、[13 | 105]、[14 | 106]。这样计算机就算出了答案，因此第八条指令是存答案（假设存在107号），第九条指令是印刷，第十条指令是停机。这

样整个程序就编好了，如表二所示。这是一个很简单的题目，复杂题目，只是用到的指令更多，所需要的存贮单元更多而已。

第二步是穿孔。根据计算程序将纸带穿成“穿孔纸带”。

第三步是具体运算。计算员通过“计算控制台”告诉控制器，将纸带上所记载的信号依次分别送入存贮器 1～10 号、101～105 号。启动后，控制器命令“输入设备”开动，又命令“存贮器”将纸带中的内容依次存入 1～10 号、101～105 号。输入设备送完纸带就自动关掉，并发“输入完毕”信号给控制器。存贮器存完数后，也发个“存数完毕”信号



| 区域 | 存贮器单元号 | 指令 | | 解释 |
|---|---|---|---|---|
| | | (操作码) | (地址码) | |
| 指令区 | 1 | 13 | 101 | 取被加数83.6 |
| | 2 | 11 | 102 | 加38 |
| | 3 | 11 | 103 | 加9.4 |
| | 4 | 11 | 104 | 加8.22 |
| | 5 | 10 | 106 | 除数=*139.22*存入106号 |
| | 6 | 13 | 105 | 取被除数173 |
| | 7 | 14 | 106 | 除以*139.22* |
| | 8 | 10 | 107 | 答案存入107号 |
| | 9 | 05 | 107 | 印刷答案 |
| | 10 | 01 | 000 | 停止工作(计算完毕) |
| | 11 | | | |
| | ⋮ | | | |
| | ⋮ | | | |
| | 100 | | | |
| 数据区 | 101 | 83.6 | | 已知数 (101～104) |
| | 102 | 38 | | |
| | 103 | 9.4 | | |
| | 104 | 8.22 | | |
| | 105 | 173 | | |
| | 106 | *139.22* | | 中间结果(除数) |
| | 107 | **1.24** | | 答案 |
| | 108 | | | |
| | ⋮ | | | |
| | ⋮ | | | |
| | 200 | | | |
| | ⋮ | | | |
| | ⋮ | | | |

(表二)

给控制器。控制器得到这两个信号，就知道指令、数据已放在规定的地方了。于是它就正式照程序表的第一条指令进行运算（无特殊规定，总是自动地从第一条做起）：这时控制器命令存贮器将第1号单元的指令送给它，控制器中的操作码分析器马上得到“13”，一见“13”就知道是取数，又据地址码寄存器中为101，就知道是取101号的数。于是命令存贮器将101号的数(83.6)送到运算器，同时又命令运算器收数。当存贮器、运算器各发出“送数完毕”、“收数完毕”信号时，第一条指令就做好了。这时控制器再命存贮器将第2号指令送给它（| 11 | 102 |），分析后知道是加102号的数，于是命令运算器做加法，命令存贮器将加数(38)送到运算器，送完、加好后各发出回答信号，第二条指令也就做完了。依此类推，当做完第五条指令后，139.22（除数）就存入106号单元了。做完第八条，107号中就存入了答案（**1.24**）。第九条指令是 | 05 | 107 |，控制器就命令印刷机开动，命令存贮器将107号的数送到印刷机印出答案。第十条指令是“停机”，控制器命令全机（包括控制器本身）停止工作。这时所要的答案就在印刷纸上了。

上面粗略地介绍了电子计算机的工作原理。事实上它并不太复杂，从物理学上来看，它只是光→电→磁→电→机械之间的相互转换。而这些东西我们在工作和日常生活中是天天见面的，只要对它们有一定的了解，就可从事电子计

算机的工作，没有什么神秘，也不是高不可攀的。目前，研制、运用电子计算机的群众运动正在蓬勃发展，让我们在计算技术方面作进一步的努力吧！

## 为什么电子计算机的用途非常广泛？

现在电子计算机的解题能力越来越强，不论什么样的数学题目，它都能计算。它不但可以用来计算人造卫星的轨道、导弹飞行的轨道和原子反应等等；对现代化的工业生产也是不可缺少的，例如：船舶设计、桥梁设计、水力发电、地质探矿等方面的大量计算都要用到它。人们还可以借助电子计算机来实现高度复杂的自动控制，如利用电子计算机来控制单独的一台机床，也可用来控制一条生产流水线，甚至控制整个工厂的全部生产过程。另外，电子计算机还能把一国文字翻译成另一国的文字。

按电子计算机的用途来说，可以分为两大类：一类是“通用电子计算机”，另一类是“专用电子计算机”。“通用电子计算机”是指可以计算任何数值问题的计算机，一般用作科学研究、方案设计等方面的计算；它的特点是解题能力强，运算速度快，数值范围大。“专用电子计算机”是为解决某一方面的计算任务或自动控制而特制的，如：“数值积分机”是专门计算积分题目的；“线切割程序机床计算机”是根

据模具的外形、尺寸，专门计算切割刀具的进刀方向、进刀量，而来加工各种模具的。专用电子计算机的特点，是结构简单、体积小、稳定可靠、环境适应性强（如耐振、耐高温、耐低温或耐潮湿等等）。

电子计算机的用途为什么这样广泛呢？

首先，是由于电子计算机具有通用性。对于通用电子计算机来说，它可以解算任何题目，只要你写得出算式，不论多么复杂，它都能算得结果。

其次，是电子计算机算得非常快。不少题目，人们都会算，不过只因算得太慢而失去了它的作用。在实际问题中，往往需要根据所测量到的机器或导弹的运行状态中的一些数据计算出某些结果，利用这些结果再回来控制它们的运行。对于这一类性质的计算问题，就要求计算的速度很快很快，否则会“差之毫厘，失之千里”。

第三，是电子计算机算得非常精确。人们用算盘、计算尺等来算题时，往往会算错；再复算一遍，又需要很长的时间。电子计算机一次就能算准，即使要复算一次，花时也不多。在实际运用中，有不少题目，本来要求的有效数位是较长的，因计算太繁琐，往往降低其精确度。可是这对电子计算机来说，就不是什么问题了，一方面它的有效数位比较长；另一方面，如要再加长有效数位，只须在计算时，拼拼拆拆就能完成，而且这种拼拼拆拆的工作也可以叫电子计算

机去做。因此人们需要的精确度，一般都能满足得了。

第四，是电子计算机能够节省大量的人力。所以电子计算机的用途也越来越广泛。

虽然电子计算机的作用大，用途很广，可以代替人们大量的繁琐劳动，就象火车、汽车、起重机等能代替人的脚和手一样。但是它却无法、也永远不可能代替人的思维活动，代替人的发明、创造。电子计算机毕竟是一种工具，它只能按照人的意志和安排去进行计算，离开了人，它只能是一个废物。

## 电子计算机为什么算得非常快?

1945年世界上出现了第一台电子计算机，到今天不过二十多年，在这不长的时间里，已有了飞跃的发展。现在电子计算机的运算速度，每秒钟已达到几十万次、几百万次、几千万次，甚至上亿次。

为什么电子计算机算得这样快呢?

因为电子计算机中的运算器、控制器都是由双稳态电路和各种“门”电路组成的；也就是说，它们是利用电子运动的速度来进行计算的。我们知道，电在导线上的传递速度是每秒钟30万公里，这个速度是不变的。如果我们叫双稳态电路变化一个状态（或者叫一个“门”通过一个脉冲），所

需时间只有几百万分之一秒，甚至几亿分之一秒。所以电子计算机的运算速度是非常之快的。

其次，电子计算机的运算是非常简单的。不论多么复杂的问题，只要由人事先设计好计算程序，把计算程序连同原始数据送给计算机，它就能按照人工编制的程序，一步接一步地自动对原始数据进行运算。它每次的运算都很简单，如做加法，只需做 1+1，1+0，0+1，0+0，总共只有这四种情况（减法、乘法、除法也是如此）。这样简单的计算，小学生也能很快地算出来。由于计算简单，运算器也可以做得很简单；也就是说，所需要的双稳态电路、“门”电路比较少，计算时电子所走的路也较少，这就使运算速度加快了。

还有，当计算开始后，所有计算过程全是自动化的，这也是它算得快的原因之一。目前，那些每秒钟能运算几千万次、上亿次的电子计算机，实际上不是一台计算机所达到的，往往是由几台、几十台、甚至几百台计算机联合组成、同时计算的，因此它的速度也就很快很快了。

从电子计算机所用的元件来看，一般可以分为四大类：一、电子管电子计算机，这是它的第一代，目前正陆续被淘汰中；二、晶体管电子计算机，是它的第二代；三、集成电路电子计算机，是第三代；四、大面积集成电路电子计算机，是第四代。由于一代比一代的体积小，电路之间的连线也就更短，所以它们的运算速度一代比一代快了。

事实上，电子计算机的运算速度还远远没有达到电子运动的速度。这是因为在具体的电子电路中，还有电阻、电容、电子管、晶体管等元件，当电子通过这些元件时，要花费一定的时间。另外，一般存贮器的速度都比较慢，因而提供运算的数据、指令，就要花掉较多的时间。还有输入、输出的设备多利用机械设备，这也使其速度降低了。因此，要提高电子计算机的实际计算速度，不仅要从运算元件着手，还需要提高记忆元件、输入设备和输出设备的速度。

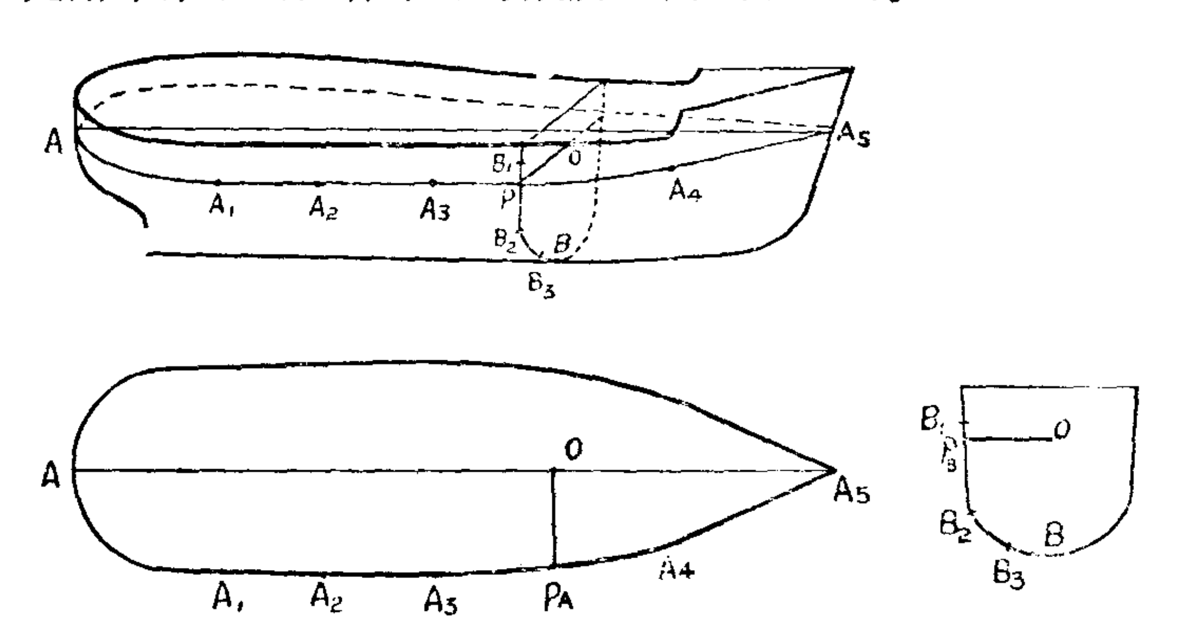
## 为什么电子计算机能代替人工放样？

七十年代的第一个春天，我国工业战线掀起了一个“**抓革命，促生产，促工作，促战备**”的工业生产新高潮。用马列主义、毛泽东思想武装起来的工人阶级，在“**打破洋框框，走自己工业发展道路**”的光辉思想指引下，发挥了冲天干劲，“**下定决心，不怕牺牲**”，连续作战，终于在最短的时间内，高质量、高速度地建成“风雷”号、“安源”号、“险峰”号、“岳阳”号等万吨巨轮，为我国造船工业史写下了令人鼓舞的新篇章！

造船，先要进行设计。设计一条船的船体，往往先要制造一个较小船模（例如，1:100），经过一系列实验，确定了船体的形状后，再把船体的线型按比例放大到实际大小，以便

进一步掌握船体表面及肋骨的形状。把船体线型放大到实际尺寸的工作，叫做船体线型放样。造船工人就根据船体的线型放样截割钢板，进行制造。

如果要把船体的轮廓曲线画出来，先要对船体作一系列的水平截面（$A$），横剖面（$B$）和纵剖面。在船模上测得水平面与船壳面交点 $A_1$、$A_2$、$A_3$……的坐标，横剖面 $B$ 与船壳面交点 $B_1$、$B_2$、$B_3$……的坐标；把它们放大（100 倍）到实际尺寸，再用光滑的曲线把它们连结起来。在实际工作中，是用木条（又称“样条”）弯成所画曲线形状的。




由于 $A_1$、$A_2$、$A_3$……和 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 等点是在模型上测得的，难免有一点误差，放大 100 倍后，误差也相应增大，因此通过这些点的曲线往往是弯弯扭扭的，不能代表一个理想的船体线型，工人老师傅就要对这些样条作修改移动，使样条所表达的曲线，既光滑，又不扭来扭去。

但这时又发生了一个问题，在对水平面$A$与横剖面$B$上的线型作修改时，由于$OP_A$与$OP_B$原来是表示船体中同一线段$OP$的，经过修改，不一定有完全相等的长度，这样剖面$A$与剖面$B$就不能很好地吻合了。造船，必须使线型非常光滑，又要使不同方向的剖面能很好地吻合，这是一个矛盾。

怎样解决这个矛盾呢？过去，靠人工操作，靠工人老师傅凭经验修改。放样时，老师傅整天地弯着腰、曲着腿在地板上进行工作，三个老师傅放好一条船的船体线型，至少需要两三个星期的时间。造船工人是分秒必争的，岂能让放样拖住腿？再说，这样进行放样工作就需要一个长达几百米的放样楼，目标大，一旦被敌人破坏，船舶就失去了建造的依据。造船工人响应毛主席"**提高警惕，保卫祖国**"的号召，在兄弟单位大力支持下，经过艰苦奋斗，终于革了放样楼的命，用电子计算机代替了人工放样工作。

那么，电子计算机是怎样解决船体线型放样中的矛盾的呢？首先分段用三次代数曲线来描述水平截面$A$和横剖面$B$上的船体曲线。我们知道三次代数曲线是有很多很多的，而分段用不同的三次代数曲线，又使曲线的样式有很多组，从中我们可以用电子计算机选出最适当的一组曲线，使它们既光滑，又与相应的原始点$A_1$、$A_2$、$A_3$……，$B_1$、$B_2$、$B_3$……非常接近，还能使代表同一线段$OP$的$OP_A$、$OP_B$都

相等，这样就很好地解决了船体线型放样中的矛盾。

电子计算机的计算当然比手工操作快得多，一条船的船体线型放样，只需要一天的数据准备工作和电子计算机计算4～6小时，就全部完成了，真是又快又好的先进放样法。

## 几倍的“倍”字应该怎么用？

在毛主席教导下，我国人民发扬了独立自主，自力更生，艰苦奋斗，勤俭建国的革命传统，找到了多快好省地发展社会主义工业、农业，国防建设和科学文化的道路。建国以来，我国工农业生产都有了成倍、几十倍、几百倍的增长。可是，你仔细想过没有，几倍的“倍”字到底应该怎么用呢？

拿我国的钢铁工业来说，1958年的产量比1952年增加了7倍多。我们能不能说，1958年的产量是1952年的7倍多呢？不能。为什么？

在讲到倍数的时候，常常有许多种说法，但我们可以把它归纳为两种说法。一种说法是：“为”几倍、“是”几倍、“增大为”几倍、“等于”几倍；另一种说法是：“大”几倍、“多”几倍、“增加”几倍、“增大”几倍。我们必须要分清这两种说法的不同含义。

如果说新产量是原产量的 7 倍，意思就是说：

新产量＝原产量×7；

如果说新产量比原产量增加了 7 倍，意思就是说：

新产量＝原产量＋原产量×7＝原产量×8

即新产量应该是原产量的 8 倍。

因此不能说 1958 年产量是 1952 年的 7 倍多，而应当说是 1952 年的 8 倍多。

当然，有时候你也会听到“小几倍”、“低几倍”的说法，尽管它的原意是指应当拿“几”去除，可是实际上这样的讲法是不很妥当的。譬如说，去年村子里生某种疾病的有 10 人，今年只有 5 人，你能说今年生病的人比去年“少”2 倍吗？如果说可以，那么减少 1 倍将是什么意思呢？

所以，碰到这种情况，应该说今年生病的人“等于”去年的“几分之几”，例如说，今年生病的人只有去年的二分之一，那是谁也不会误解的。

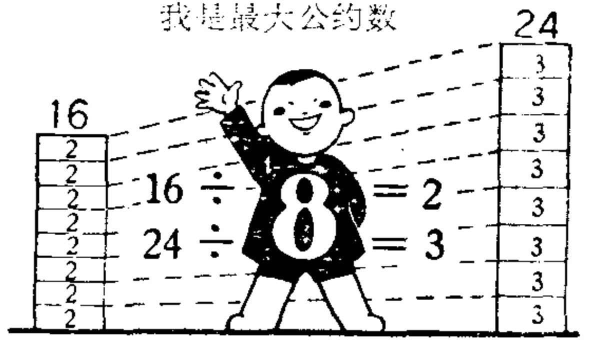
这样看来，如何正确使用这个“倍”字，也是值得我们注意的呢！

## 为什么没有最小公约数和最大公倍数？

在数学里我们学过最大公约数和最小公倍数。也许你会提出问题，为什么公约数要讲最大，而公倍数却又讲最小

呢？有没有最小公约数和最大公倍数呢？如果有的话，那么为什么不讲呢？

我们先从一个具体情况来看：譬如正整数 16 和 24，它们有许多公约数，就是：1、2、4、8，它们的最大公约数是 8，最小公约数是 1。

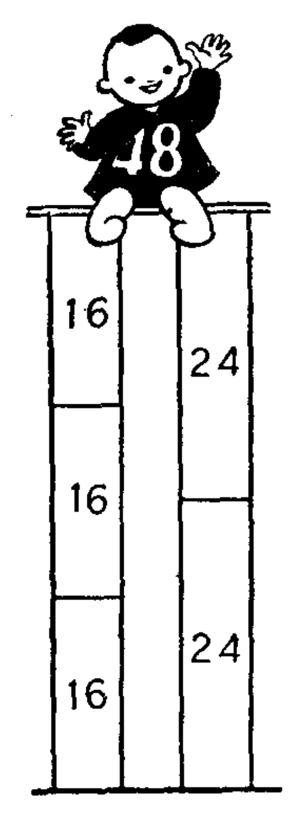



再看正整数 15 和 56，它们只有一个公约数，就是 1 。

从这里可以看出，任何两个正整数，总有公约数 1，而且 1 总是它们的最小公约数（公约数总是只讲整数的）。两个或两个以上的数，它们的最小公约数既然总是 1，那当然不必讨论了。这就是我们不谈最小公约数的一个道理。但这还不是主要的道理。主要的道理在哪里呢？

我们学习数学，总是有目的的，要数学知识为我们服务，而不是拿数学知识做游戏。两个数的最大公约数，在分数约分里是用得到的。通过约去分子分母的最大公约数，我们可以把一个分数化成最简分数。这样就比较简单了。而最小公约数 1，却没有什么用处。这是我们不研究最小公约数的根本原因。

那么两个数有没有最大公倍数呢？譬如有两个正整数 16 和 24，它们的最小公倍数是 48。48 乘上任何整数之后显然仍旧是 16 和 24 的公倍数。




譬如 $48\times2=96$， $48\times3=144$，$48\times4=192$，$48\times1,000=48,000$ 等都是 16 和 24 的公倍数。因为自然数没有最大的数，所以也就没有最大的公倍数。

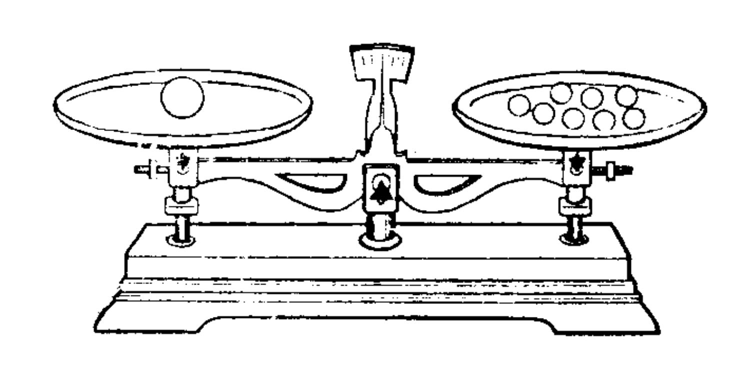
事实上，在分数通分的时候，也只需用到最小公倍数。如果用较大的公倍数，反而不方便。所以我们既没有最大公倍数，也不需要任何较大的公倍数。这就是我们只研究最小公倍数的理由。

## 为什么直径增大 1 倍，滚珠的体积就增大到 8 倍？

在伟大领袖毛主席"**抓革命，促生产**"的战略方针指引下，我国轴承制造工业取得了振奋人心的新成绩。现在我们已经能够生产各式各样的轴承。

在轴承工厂里，需要生产各种大小的球形滚珠。有时会碰到这样的问题：某车间原生产甲种滚珠，每生产 1,000 个，需钢材 1 公斤。现改为生产直径为甲种滚珠直径 2 倍

(即直径增大 1 倍)的乙种滚珠,那么,每生产乙种滚珠1,000个,需多少钢材?



做滚珠所需钢材的多少,是和体积成正比的;甲、乙两种都是生产 1,000 个,所以只需考虑每个乙种滚珠的体积,为甲种体积的多少倍就行了。我们先回忆一下球的体积的公式

$$V=\frac{1}{6}\pi D^3,$$

其中 $V$ 是球的体积,$D$ 表示球的直径。

假设甲种滚珠的直径为 $D$,则乙种滚珠的直径为 $2D$,我们有

$$V_{甲}=\frac{1}{6}\pi D^3。$$

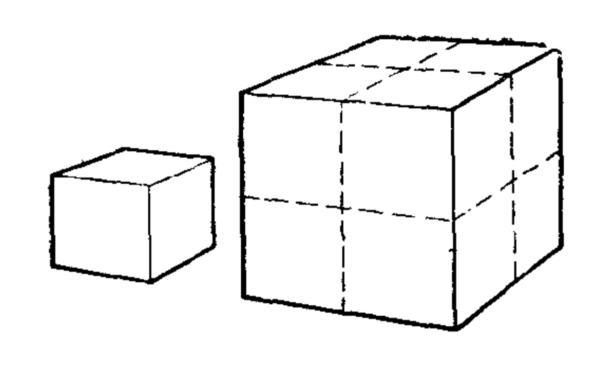
$$V_{乙}=\frac{1}{6}\pi(2D)^3=8\cdot\frac{1}{6}\pi D^3。$$

$$\therefore \qquad V_{乙}=8\cdot V_{甲}。$$

这就是说球形滚珠直径增大 1 倍时,体积增大到原来的 8 倍。因此如果生产 1,000 个甲种滚珠需钢材 1 公斤;那么生产 1,000 个乙种滚珠,就需钢材

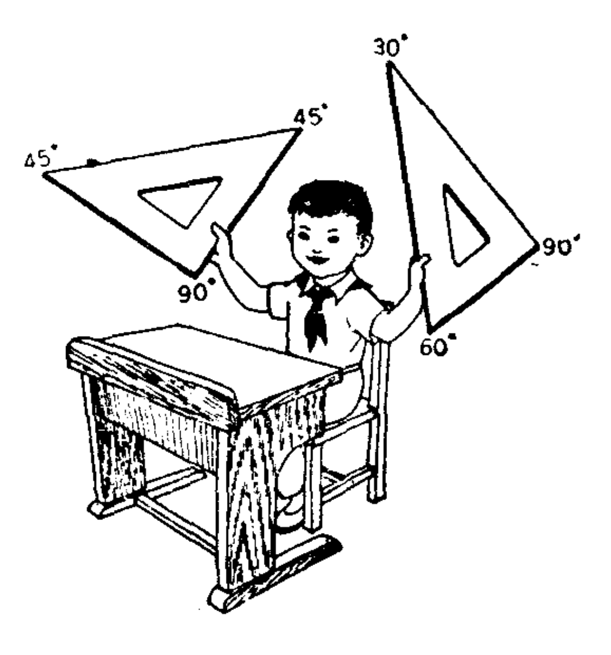
1 公斤 ×8＝8 公斤。

事实上,不只是球有这样的性质。一切相似的多面



体，只要对应的边长（或棱长）增大1倍，体积就要增到8倍。例如：立方体就有这种关系。

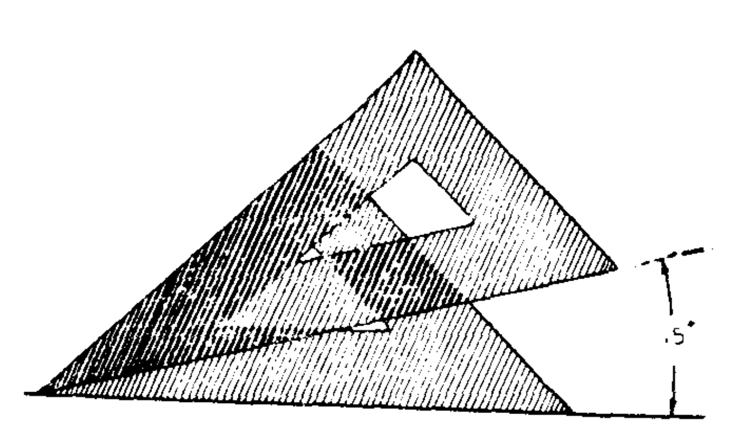
## 用一副三角板上的角，能画出多少个角？




一副三角板上只有30°、45°、60°、90°四种角度。现在单用一副三角板究竟能作出几个角度？看来，这个问题很简单，如果我们细细地思考一番，倒满有意思的。

毛主席教导我们："**必须提倡思索，学会分析事物的方法，养成分析的习惯。**"通过思索分析，我们可以很清楚地看出，90°和60°角可以分别由45°和30°角重复画几次，并合起来，所以我们要算单用一副三角板能画出几个角度时，可以不考虑90°和60°角的作用，只算一算由45°和30°角所能作出的角度就可以了。由45°和30°角能作出

哪些角度呢？我们从下图可以看出能作出 15° 角，而 45° 和 30° 正好分别是 15° 的 3 倍和 2 倍；




所以反过来由 15° 出发，可以作出 45° 和 30°。因而由 45° 和 30° 作出的角，都能由 15° 出发作出来。由 15° 出发，所作出的角度都是 15° 的整数倍：

$$\alpha = 15° \times n, （n \text{ 是整数}）$$

于是我们得到这样的结论：单用一副三角板能画出的角度，都是 15° 的倍数。

按一般角的概念来说，单用一副三角板可以画出无穷多个角。但是，如果把角限制在 0°～360° 之间的话，就有

$$360° \div 15 = 24 \text{ 个（其中不包括 } 0°\text{）。}$$

譬如：要作 285° 角，

首先我们必须判断一下，所作的角度是不是 15° 的倍数？

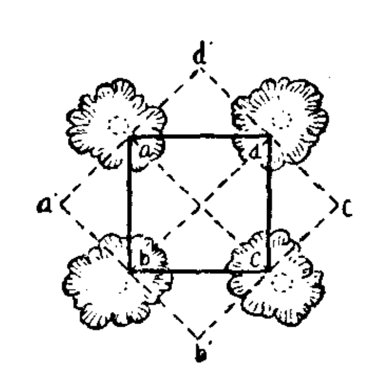
285° 角正好是 15° 的 19 倍，所以可用三角板画出。

我们先做两条互相垂直的直线，可得 270° 角，由此出发再做 15°，就得到 270° ＋15° ＝285° 的角了。

## 不搬动池塘四角的大树，能使池塘扩大一倍后，还是正方形吗？

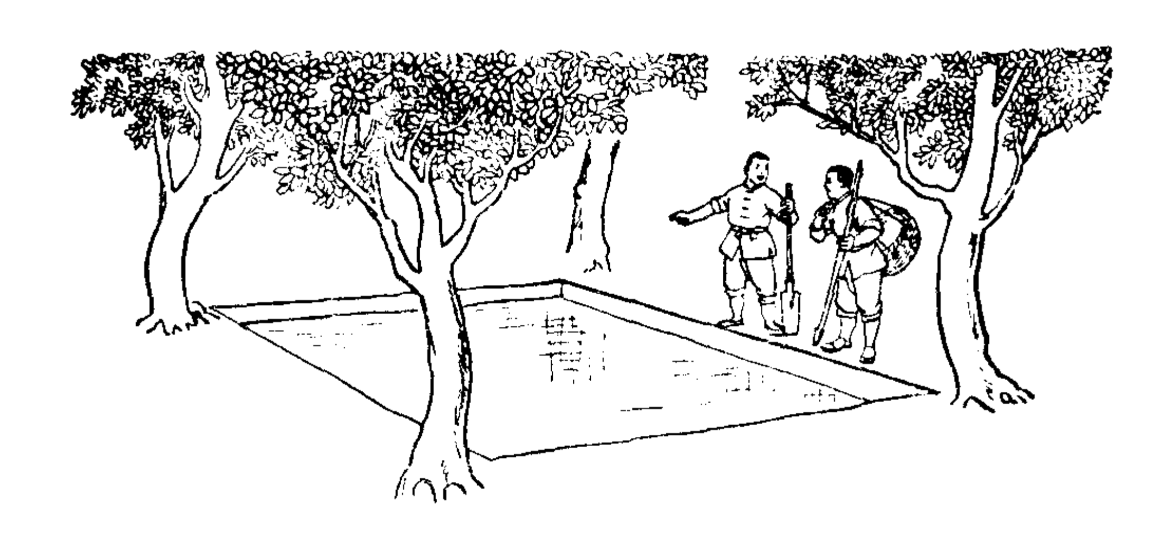
某生产队有一正方形池塘，在它的四角上有四棵大树，现在为了扩大池塘养鱼植藕，要把原有池塘扩大一倍，但是，这四棵树不便搬动，也不能使它淹在水里，而且扩大后的池塘还是正方形，这该怎么办呢？

看来这问题有些难，可是如果你动动脑筋，按照下图中的 $a'$ $b'$ $c'$ $d'$ 虚线开掘池塘，就能使池塘的面积增大一倍后仍是正方形的，大树也不要搬动。




为什么呢？你能不能证明一下？

让我们把面对面的两棵大树连起来，就得到 $ac$ 和 $bd$ 两条线，它们也就是原来池塘 $abcd$ 的对角线。再在 $a$ 和 $c$ 两点作平行于 $bd$ 的线 $a'd'$ 和 $b'c'$；在 $b$ 和 $d$ 两点作平行于 $ac$ 的线 $d'c'$ 和 $a'b'$。因为 $ac$ 垂直于 $bd$，所以 $a'd'$ 和 $c'b'$ 也就和 $a'b'$ 及 $c'd'$ 垂直了。因此这新四边形的四条边和原来的旧正方形池塘的两条对角线都相等，所以新四边形的每一条边自己也都相等。这样，$a'b'c'd'$ 就是一个正方形了。



由于新正方形又被 $ac$ 和 $bd$ 分为 4 个小正方形，而 4 个小正方形中的一半刚好凑成了旧的正方形 $abcd$，另一半是新掘的，所以新正方形面积刚好等于旧正方形的 2 倍。

## 怎样配制农药“九二〇”的浓度？

在无产阶级文化大革命中，广大贫下中农响应毛主席**“抓革命，促生产”**的伟大号召，坚决贯彻毛主席**“以农业为基础”**的伟大指示，狠抓革命，猛促生产。为了丰产丰收，提高农产品的质量，在农村普遍推广使用了农药“九二〇”。随着需要量的扩大，目前一个“九二〇”土洋结合、土法上马的群众运动的高潮正在全国各地蓬勃掀起。

“九二〇”是一种效能很高的植物生长刺激素，只要用很低的浓度，便能促进植物细胞体积的增大，调节控制植物体内营养物质的运输及分配。实践证明，“九二〇”能促进

植物茎叶的生长和树木、种子的发芽，刺激果实的生长，增加结果率或形成无籽果实等。根据近二年大田试验的结果，对粮食、棉花、蔬菜都获得了显著的增产效果。广大贫下中农热情赞道："毛主席革命路线来引导，科学种田就是好，'九二〇'用来象个宝，棉铃一蘸就结牢，水稻用了空谷少，蔬菜发嫩产量高。"

但是，各土法产品所含纯"九二〇"的量是不一样的，各种农作物所需的浓度也是不同的。那么，我们在使用"九二〇"土法产品时，怎样来配制它的浓度呢？

"九二〇"的含量，一般用"单位"这个名词来表示，含量为一个单位，是指在每一克土法产品中含有百万分之一克（即一微克）的纯"九二〇"。例如：当我们说某土法产品的含量为 1,000 单位时，就是指每一克土法产品中含有纯"九二〇" 1,000 微克。

浓度通常用百万分之几来表示，对百万分之一的浓度我们用记号 1p.p.m. 来表示，它的意义是指每一毫升溶液中含有一微克的纯"九二〇"。在农作物上一般用 5p.p.m. 到 20p.p.m.（即百万分之五到百万分之二十）的浓度，但是对果树、桑、茶等木本植物，要用 50p.p.m. 到 100p.p.m. 的浓度。

如果我们知道了土法产品的含量为 $a$ 个单位，使用所需的浓度为 $b$ p.p.m.（即百万分之 $b$），那么，1 斤土法产品

要加多少斤水，才能配制成所需的浓度呢？

假设要加的水为 $x$ 斤，因为一斤水的容积为 500 毫升，所以 $x$ 斤水的容积为 500 $x$ 毫升、另一方面，一斤土法产品是 500 克，根据假设它的含量为 $a$ 个单位，就是说每一克土法产品含有纯“九二〇” $a$ 微克，所以一斤土法产品含有纯“九二〇” 500 $a$ 微克。

溶液的浓度是什么意思呢？是指它所含纯“九二〇”的总量与溶液的容积之比（因土法产品本身容积较小，在计算溶液的容积时，可以忽略不计），因此有：

$$b(\text{p.p.m.}) = \frac{500\,a\,(\text{微克})}{500\,x\,(\text{毫升})},$$

$$\therefore \qquad x = \frac{a}{b};$$

它的意义就是：

$$\text{加水斤数} = \frac{\text{土法产品含量单位数}}{\text{使用浓度}}。$$

毛主席教导我们：**“认识的真正任务在于经过感觉而到达于思维，到达于逐步了解客观事物的内部矛盾，了解它的规律性”**，当我们掌握了上面的规律性后，利用这个公式就能很快算出土法产品要加多少斤水，才能配制成所需的浓度了。

例如：经测定某土法产品含量为 1,400 单位，要配制成浓度为 20 p.p.m.（即百万分之二十）的溶液，要加多少斤

水呢?

根据上面公式

$$加水斤数=\frac{1,400}{20}=70,$$

所以每斤土法产品要加 70 斤水，才能配制成浓度为 20 p.p.m. 的溶液。

在实际应用时，为了使用方便，对各种不同含量的土法产品，按照它的常用浓度，可把应加水的倍数列成表格，这样要用的时候查一下便知道了。

另外，在具体使用时，因为大田里需要大量的溶液，为了运输上的方便，我们常先配制成浓度较高的“九二〇”原液，然后再运输到使用地点，加水配制成所需的浓度。那么，这第二次的加水倍数又应该怎样计算呢?

举一个具体例子，例如：把含量为 1,000 个单位的土法产品，先加 10 倍水配制成浓度为 100 p.p.m. 的原液；运输到使用地点后，如果要配制成浓度为 10 p.p.m. 的溶液，这时候，一份原液要加多少倍水呢?

假设这份原液为 $n$ 毫升，因为原液的浓度为100p.p.m.，所以这份原液含有 $100n$ 微克的纯“九二〇”。

现在我们假设要加 $y$ 倍水，那么加水后溶液的容积为 $n+yn$，即 $(y+1)n$ 毫升，根据浓度定义的比式，应该有：

$$10(\text{p.p.m.}) = \frac{100n(\text{微克})}{(y+1)n(\text{毫升})},$$

$$\therefore \quad y = \frac{100}{10} - 1 = 9。$$

这就是说，运输到使用地点时要再加 9 倍水。

一般来说，根据上面计算的过程，我们应该有下面的公式：

$$\text{加水倍数} = \frac{\text{原液浓度}}{\text{使用浓度}} - 1。$$

在上面一个例子里，如果运输到使用地点后，要配制成浓度为 15 p.p.m. 的溶液，那么，同样利用上面公式可以算出：

$$\text{加水倍数} = \frac{100}{15} - 1 = \frac{17}{3}。$$

实际配制时，可取 3 份原液加水 17 份配制便成了。

## 地主是怎样利用高利贷残酷剥削农民的？

我们青少年都是在红旗下成长的，对于工人、贫下中农在旧社会所受的阶级苦，不象前辈那样有切身的体会。因此我们经常请老工人、老贫农给我们上阶级教育课。他们

以自己亲身的经历，结合形势作“回忆对比”，诉旧社会的苦，颂新社会的甜，使我们提高阶级斗争、路线斗争和无产阶级专政下继续革命的觉悟。

在吃人的旧社会里，在三座大山的压迫下，广大劳动人民过着穿不暖、吃不饱的牛马生活。亿万农民每当春夏之间，青黄不接时，高利向地主借债。万恶的地主阶级用尽各种残酷的剥削手段剥削农民，其中有一种叫做“驴打滚”（又称“利上加利”）的高利贷，这种高利贷是怎样残酷地剥削农民的呢？例如：一个农民在青黄不接之际，向地主借了100斤谷子，过了一个月就要付10斤谷子作为利息，过了两个月要利上加利，地主就要农民交121斤谷子。一年后，这个农民一共要交给地主多少斤谷子呢？

我们看一看地主的剥削罪行：

第一个月，地主要收10%的利息，本利为：

$$100\text{斤}\times(1+10\%)=110\text{斤}。$$

第二个月，地主在第一个月的本、利上又要加收10%

$$110\text{斤}\times(1+10\%)=121\text{斤}。$$

即 $$100\text{斤}\times(1+10\%)^2=121\text{斤}$$

第三个月，地主在第二个月的本、利上又要加收10%

$$121\text{斤}\times(1+10\%)\approx133\text{斤}。$$

即 $$100\text{斤}\times(1+10\%)^3\approx133\text{斤}$$

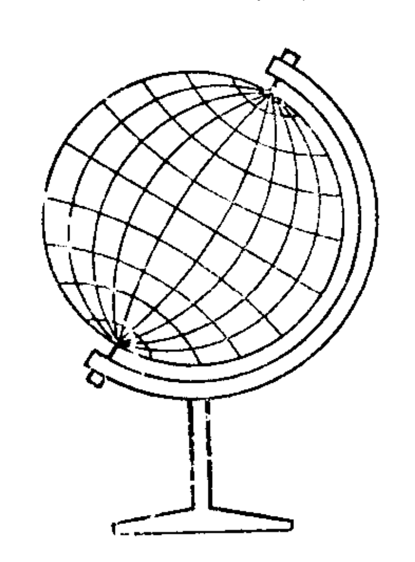
一年后（即十二个月后）农民就要交给地主

$$100\text{斤}\times(1+10\%)^{12}\approx 314\text{斤}。$$

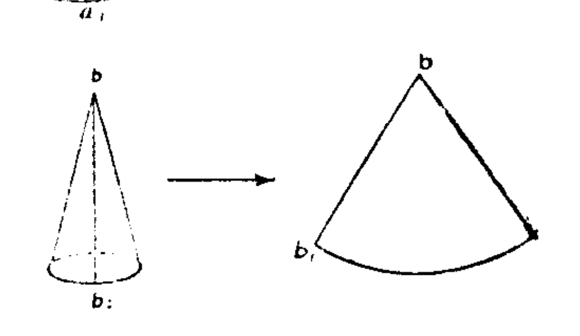
一个农民向地主借 100 斤谷子，地主用“驴打滚”的剥削手法，以“大加一”的利息，一年后这个农民竟要交给地主 314 斤谷子。看，地主对农民的剥削多么残酷！打倒地主阶级！打倒封建剥削！

可是叛徒、内奸、工贼刘少奇却胡说什么“放高利贷自由”，鼓吹“剥削有功”论，妄图在中国复辟资本主义，再叫劳动人民吃两遍苦，我们坚决不答应。打倒刘少奇！

## 地球仪表面上的纸是怎样贴上去的？



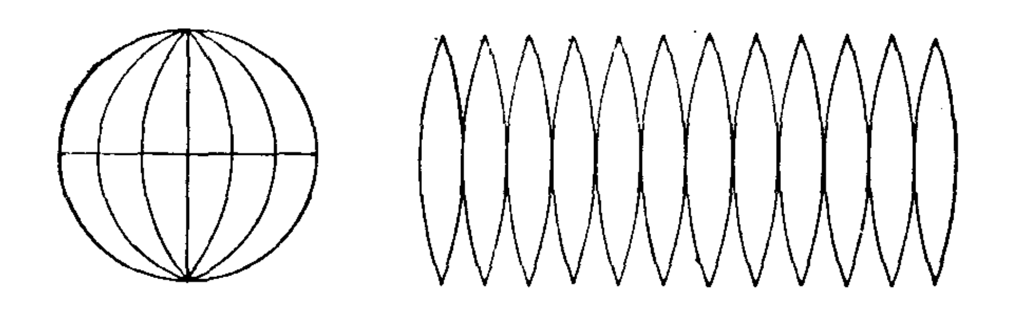
我们的地球是一个球体，如果要最直观、最清楚地表示地球上世界各国的位置和大小，就要用到地球仪。你会做地球仪吗？地球仪表面上的纸是怎样贴上去的？




我们知道有些立体的表面，如圆柱面、圆锥面等，把它们剪开以后都能摊平，这些立体的表面，在数学上叫做可展曲面（如右图）。

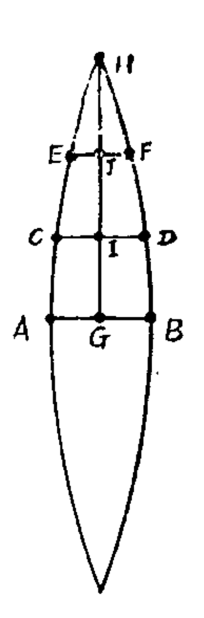
但是球面却不是可展曲面，不论从它的哪一部分剪开，都不能把它展开成平面。因此用一张完整的纸贴在地球仪上，必然有许多地方都会重迭起来。那么，该怎样做呢？我们可以采取近似展开的办法来做：把球面分成 12 块相等的月形，先用纸剪好这 12 块月形，然后再拼着贴起来，就能制成地球仪的表面了。但是，这月形的形状与大小如何确定呢？假使我们地球仪的半径是 $R$，这 12 块月形便可按下法近似地作出来。

先作 $AB=\frac{2\pi R}{12}=\frac{\pi}{6}R\approx 0.52R$（赤道大圆长的十二分之一）；然后作 $AB$ 的中垂线，取 $GH=\frac{2\pi R}{4}=\frac{\pi}{2}R\approx 1.57R$（经线大圆长的四分之一）。

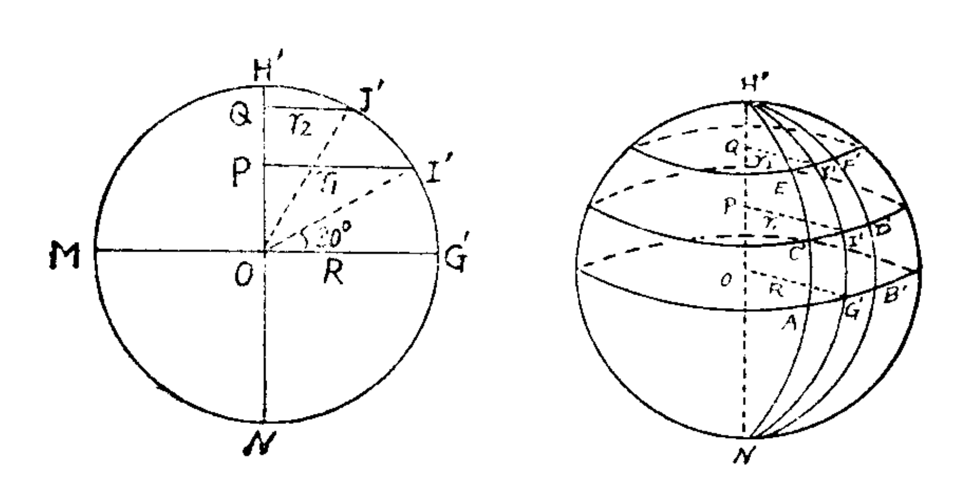


在以 $R$ 为半径的圆中（如下图），设 $G'M$ 与 $H'N$ 是互相垂直的二条直径，把弧 $\overset{\frown}{G'H'}$ 三等分，得分点 $I'$、$J'$，过 $I'$、$J'$ 作平行于 $G'M$ 的线段 $I'P=r_1=R\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}R\approx 0.87R$，$J'Q=r_2=R\sin 30^\circ=\frac{R}{2}=0.5R$。然后把左上图中的 $GH$

三等分，得分点 $I$、$J$。过 $I$ 作 $GH$ 的垂直线段 $CD$，使 $CD=\frac{2\pi r_1}{12}=\frac{\pi}{6}r_1=\frac{\pi}{6}\times 0.87R\approx 0.45R$（过 $I'$ 的纬线圆长的十二分之一）；同样方式过 $J$ 作线段 $EF$，使 $EF=\frac{2\pi r_2}{12}=\frac{\pi}{6}r_2=\frac{\pi}{6}\times 0.5R\approx 0.26R$（过 $J'$ 的纬线圆长的十二分之一）。



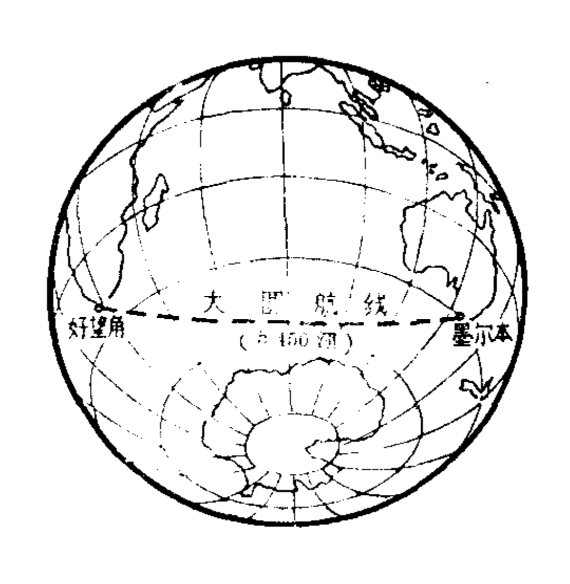

这样把 $A$、$C$、$E$、$H$ 及 $B$、$D$、$F$、$H$ 各点分别用弧形曲线连起来，就得到月形的上半部，利用对称性可作出月形的下半部，于是一块月形便近似地作出来了。如果把这块月形贴上去时，就相当贴在右下图月形 $AH'B'N$ 的位置。我们只要按照同样形状、大小剪 12 块，把它们拼着贴起来，就可制成半径为 $R$ 的地球仪的表面了。



# 为什么常用海图上的最短航线不是直线而是曲线?

在平面上，两点间的最短距离是直线。那么，从某一海港到另一海港的最短航线，是怎样的呢?

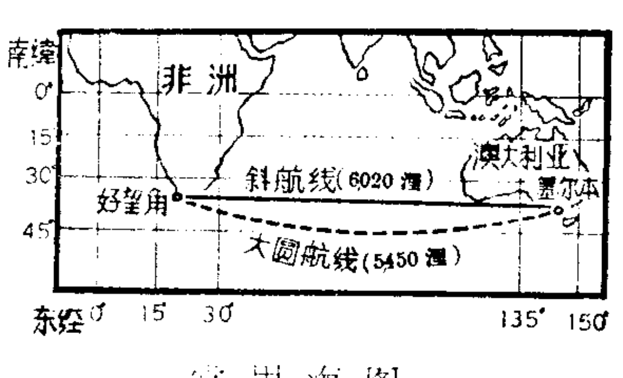
地球是个扁球体，地球面可以近似地看作是一个球面。因为通过球心的任一平面，其切口一定是圆形，这种圆叫做大圆。数学上已经证明：球面上任意两点间的最短距离，是通过这两点的大圆弧长（其中较短的一段）；而且球面上不在同一直径上的两点，只能作出唯一的大圆。现在以非洲的好望角——澳大利亚的墨尔本这条大圆航线为例，它的航程是 5,450 浬（1 浬＝1,852 米），也就是这两地间的最短距离。




航海上使用的地图，称为“海图”。由于投影的方法不同，绘制所得的海图也不相同，一般可以分为两种。

一种叫做“常用海图”，这种海图中的经线和纬线都是直线。如果连结好望角——墨尔

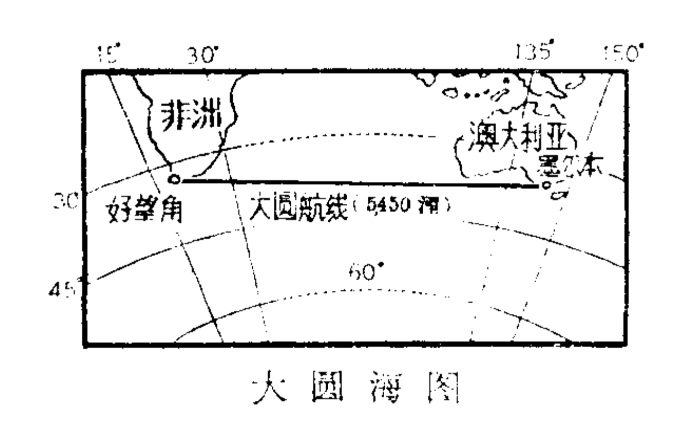
本的直线（即斜航线）．它的航程是6.020浬．斜航线的航向，可以直接从图上量得为92°03′．船舶沿着这一固定的航向航行，就能到达目的地，所以使用起来也比较方便．



常用海图

另一种叫做“大圆海图”．这种海图中的经线是辐射状的直线，纬线是曲线．连结好望角——墨尔本的直线，就是大圆航线，也就是最短的航线．它的航程是5,450浬．不过，大圆航线的航向需要通过作图或查表计算才能求得。

如果将“大圆海图”上的某一大圆航线上各点的经、纬度，画到“常用海图”上，那么各点的连线就是一条曲线，这条曲线就是最短的航线（即大圆航线）．例如：好望角——墨尔本的大圆航线的航程是5,450浬，竟比斜航线的航程要短570浬（约合1,055公里）。所以我们看问题要看实质，不要被表面现象所迷惑．如果要使船舶保持在大圆航线上航行，就必须时时改动航行的方向，但做到这一点是不大可能的．因此在实际运用中，是按一定时间间隔分段转向



大圆海图

航行。

一般在近海航行，航程不太长时，斜航线与大圆航线的航程相差不太大，可用“常用海图”，直接按斜航线航行。远洋航行时，因航程长，斜航线与大圆航线的航程之差比较大（例如：好望角——墨尔本两者的航程之差为1,055公里），为了多快好省地完成支援世界革命人民的光荣运输任务，海员们通常采用大圆航线航行。

## 为什么世界各地都能看到我国第一颗人造地球卫星？

1970年4月24日，红色电波传来了特大的喜讯，我国第一颗人造地球卫星成功地发射了！伟大领袖毛主席提出**“我们也要搞人造卫星”**的伟大号召实现了！亿万人民无不为之欢欣鼓舞，纵情歌唱：红色卫星飞长空，全球响彻《东方红》，万岁万岁共产党，万岁万岁毛泽东！

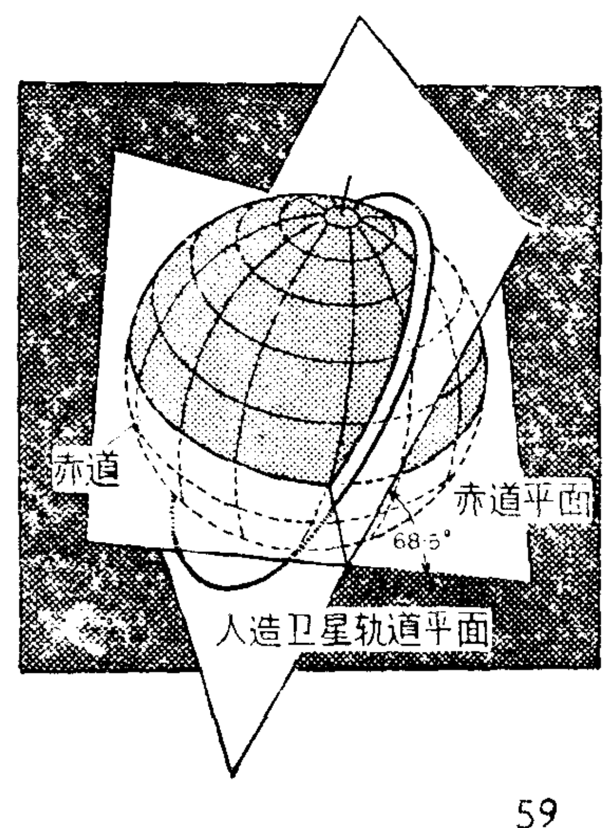
我国第一颗人造地球卫星的发射成功，是中国人民在伟大领袖毛主席和以毛主席为首的党中央领导下，高举“九大”团结、胜利的旗帜，坚持**“独立自主、自力更生”**的方针，贯彻执行**“鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义”**总路线，全国革命人民以实际行动**“抓革命，促生产，促工**

作，促战备”所取得的结果。

这次卫星发射成功，是我国发展空间技术的一个良好开端，是无产阶级文化大革命的丰硕成果，是一曲马列主义和毛泽东思想的凯歌！

我们知道，地球是绕着一根假想的自转轴，不断地自西往东自转的，赤道所在的平面同地球自转轴垂直，叫做赤道平面。人造地球卫星运行轨道所在的平面，这个平面叫做轨道平面。卫星轨道平面同地球赤道平面的夹角，通常称为轨道倾角，也简称为倾角。

我国第一颗人造地球卫星的倾角是68.5°。如果不考虑人造卫星的高度，我们看一看世界地图，就可以知道，地球上的大陆大多数都在从北纬68.5°到南纬68.5°这个广阔的地区里，由于我国第一颗人造卫星的倾角是68.5°，因此这个广阔地区当然都能看到我国的红色卫星了。事实上，能看到红色卫星的地区，比这个区域还要大一些。如果卫星位于北纬68.5°某地天顶上，高度在1,700公里以上的高空，那么，在北极



地区也可以看到我国卫星；对南极地区来说，也是一样。因此地球上任何一个地区的人们，都能经常有机会幸福地看到我国的人造地球卫星。

人造地球卫星的倾角越大，发射时所需要的推力也越大。苏联第一颗人造地球卫星的倾角是65.0°，美国第一颗人造地球卫星的倾角只有33.3°，而我国第一颗人造地球卫星的倾角就达到了68.5°，这确是一件很了不起的事情，这也标志着我国科学技术达到了一个新的水平。

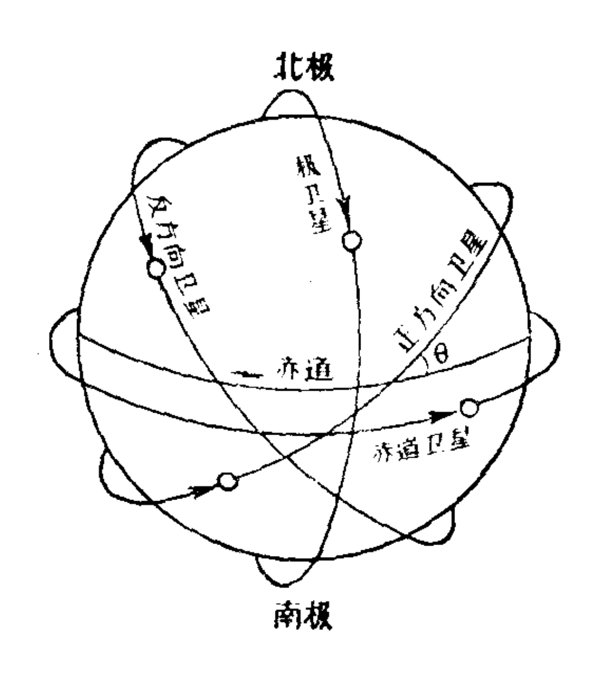
1971年3月3日，我国又成功地发射了一颗科学实验人造地球卫星，它的倾角是69.9°，世界各地也都能看到它。

## 为什么卫星轨道倾角越大，发射时需要的能量就越大？

地球每天绕地轴自西向东旋转一周，也就是说地球上任何一个地方，在一天(24×60分钟)内要转360°，每分钟转过0.25°。但是，地球上不同的地方在一分钟里移动的距离并不一样，靠近两极的地区离地轴比较近，移动就少一些，赤道离地轴最远，移动得最多。这个现象同自行车的轮子在旋转时的情况一样，轮圈离轴最远，动得很快，看不清上面有什么东西。然而，轮轴上的加油孔，虽然也跟着转，

却动得很慢，看得很清楚。具体地说，在赤道上任何一个地方，每秒钟都移动 0.465 公里。我们知道，只要能使物体具有每秒 8 公里的速度，它就能飞上天空绕地球运行。在赤道上发射卫星，因为在发射前已经具有每秒 0.465 公里的速度，因此，火箭只要具有 8－0.465＝7.535（公里/秒）的速度，就能使卫星绕地球旋转了。

如果在赤道上发射一个与地球自转方向相同的卫星，这时轨道倾角为 0°，就可以充分利用地球自转速度，发射时所需能量为最小。如果在赤道上发射一个飞经地球南北极的卫星（称为极卫星），这时轨道倾角为 90°；地球自转速度一点也不能利用，发射时所需要的能量就很大。如果在赤道上发射一个与地球自转方向成 $\theta$ 角（$0°<\theta<90°$）的卫星，这时轨道倾角为 $\theta$。$\theta$ 越接近于 90°，就越不能利用地球自转的速度，发射时所需要的能量也越大。在地球其他纬度上发射时的情况也是如此。所以发射同样重量的卫星，轨道倾角越大，发射时所需要的能量就越大。




上面所讲的卫星，其运行方向与地球自转方向所成的角度都小于或等于90°，这



种卫星称为正方向卫星(大部分卫星都属于这一类)。另外还有一种卫星，它的运行方向与地球自转方向所成的角度大于 90°，这种卫星称为反方向卫星。它发射时就象逆水行舟一样，非但不能利用地球自转的速度，在发射时还必须具有更多的能量。例如：在赤道上发射一个与地球自转方向相反的、绕地球赤道面旋转的卫星，发射时必须具有 $8+0.465=8.465$ (公里/秒)的速度，才能使卫星绕地球旋转。

我国第一颗人造卫星的重量为 173 公斤。而苏联第一颗人造卫星的重量不到我国卫星的一半，美国第一颗人造卫星的重量不到我国卫星的二十分之一。相比之下我国第一颗人造卫星的倾角最大，重量最重，因此，发射时所具有的能量也最大，这充分说明，我国的火箭技术是非常先进的，它远远超过了苏联、美国发射第一颗卫星时的技术水平。

## 为什么人造地球卫星的周期，不能任意缩短？

人造地球卫星绕地球旋转一周所需要的时间，称为一个周期。我国第一颗人造地球卫星的周期为 114 分钟。

人造地球卫星的周期，是它运动规律的一个重要因素。

那么能不能任意缩短周期，而使人造卫星尽快地绕地球飞行呢？

我们知道，人造地球卫星绕地球运动的轨道是椭圆。它的半长轴 $a$ 和半短轴 $b$ 都应该大于地球的赤道半径（$R=6378$ 公里），否则人造地球卫星就要落到地面上了。

毛主席教导我们："**我们看事情必须要看它的实质，而把它的现象只看作入门的向导，一进了门就要抓住它的实质，这才是可靠的科学的分析方法。**"

通过人们对天体运行的长期观察，发现行星（如地球）绕太阳运行时，行星运转周期 $T$ 的平方与行星轨道的半长轴 $a$ 的立方成正比，即

$$T^2=ka^3。$$

其中 $k=\frac{4\pi^2}{\mu}$，$\mu$ 是一个常数，它等于引力常数同太阳质量的乘积。

人造地球卫星绕地球运转时也是如此，即

$$T^2=ka^3。$$

其中 $k=\frac{4\pi^2}{\mu}$，这里 $\mu$ 是引力常数 $f$ 和地球质量 $M$ 的乘积，

$$\mu=f\cdot M。$$

上式也可写作 $$a=\sqrt{\frac{T^2}{k}}。$$

由于引力常数 $f=\frac{1}{3862^2}$ 厘米$^3$/秒$^2$·克

地球质量 $M=5.98\times10^{27}$ 克。

$$\mu=f\cdot M=\frac{1}{3862^2}\times5.98\times10^{27}\text{厘米}^3/\text{秒}^2$$

$$=\frac{1}{3862^2}\times215\times10^{14}\text{公里}^3/\text{分}^2。$$

而

$$k=\frac{4\pi^2}{\mu}=\frac{39.48}{215}\times3862^2\times10^{-14}\text{分}^2/\text{公里}^3$$

$$=0.184\times14915044\times10^{-14}\text{分}^2/\text{公里}^3$$

$$=2.74\times10^{-8}\text{分}^2/\text{公里}^3。$$

要使人造地球卫星不落在地面上，必须使 $a>R$，即 $\sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}>R$，而且必须使 $T>\sqrt{k\times R^3}$

$$T>\sqrt{k\times R^3}=\sqrt{2.74\times10^{-8}\times6378^3}$$

$$=\sqrt{2.74\times10^{-8}\times2595\times10^8}$$

$$=\sqrt{7110}$$

$$=84.3\ (\text{分})。$$

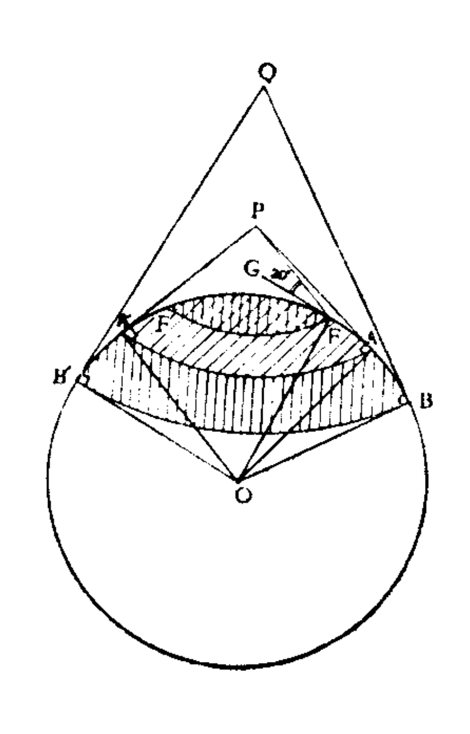
这说明人造地球卫星绕地球运动的周期，不能小于 84.3 分钟。因为地球周围有一层大气包围着，当卫星的运行周期接近于 87 分钟时，卫星就要进入离地面 200 公里的大气层，由于大气层的摩擦，会使卫星发热而陨落。所以卫星的运行周期不能任意缩短，而是有一定限度的。

# 为什么人造卫星越高，在地球上能够同时看到它的区域越大？

人们都有这样的生活经验，一个物体越高，在地面上能够看到它的范围就越大。人造卫星在天空飞行也是一样，飞得越高，在地球上能够同时看到它的范围也越广。这是什么道理呢？

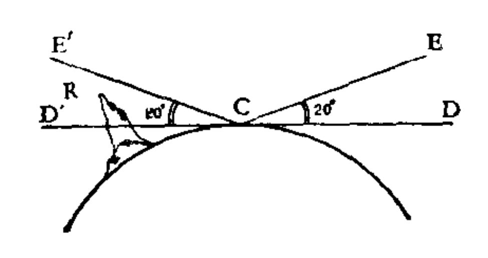
我们可以近似地把地球看成一个球体，如下图当卫星在 $P$ 点时，能够同时看到卫星的区域有多大？

粗想起来，如果卫星在观测者所在地平面以上出现，就能够看得见它。从卫星所在位置 $P$ 作切线 $PA$、$PA'$，切点 $A$、$A'$ 就是能同时看到卫星的最远点。$AA'$ 弧就是能同时看到卫星的区域，它在地球上是一个圆形区域（如图中的斜线区域）。假若卫星飞到比 $P$ 点高的 $Q$ 点，这时能同时看到卫星的区域，显然比在 $P$ 点的区域要大一些。




但是，由于地面有高山障碍、大气有折射、散射等作用，即使卫

星在观测者所在地平面以上出现，也不一定能看到它。如左图卫星在$R$点，在$C$点的观测者，因高山阻挡了视线就看不到卫星。我们把观测者和卫星的连线，与当地地平线之间的夹角称为人造卫星的仰角。一般仰角大于20°时，才能看到人造卫星。因此常把卫星的仰角大于20°的这些地方，作为可以看见卫星的区域。




现在再看看前图，当卫星在$P$点时，$A$点处的卫星仰角为0°（$A$点和卫星$P$的连线，正好在当地地平面上），比20°小，因此观测者在$A$点还看不见卫星。如果观测者从$A$逐渐向左移动，这时卫星的仰角也从0°逐渐增加；当观测者走到$F$点时，卫星仰角正好是20°（即$\angle PFG=20°$），那么，$F$点和与$F$对称的$F'$点，就是真正能同时看到卫星$P$的最远点。图中的网格型区域，就是地球上真正能同时看到卫星$P$的区域。这个区域比斜线区域要小一些。

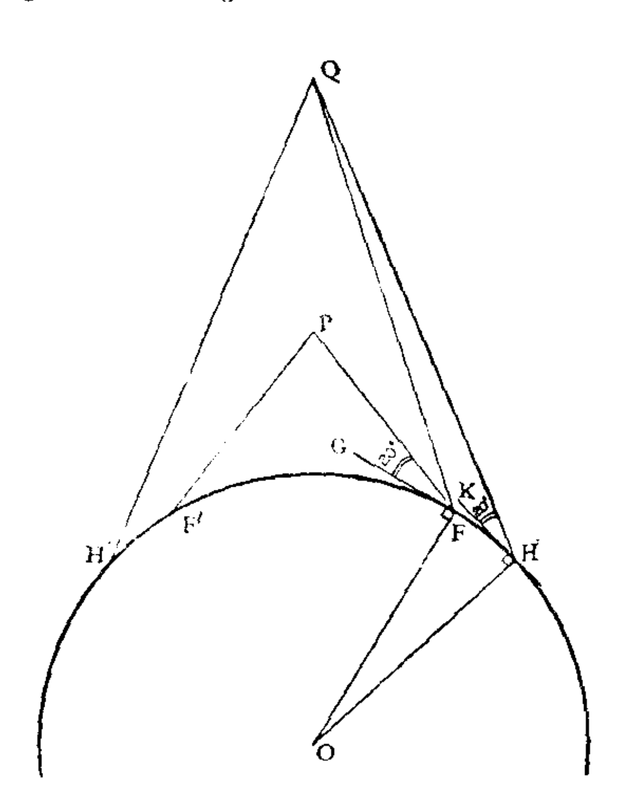
当我们考虑了卫星仰角这个因素后，仍然是卫星飞得越高，能够同时看到它的区域越大。

从下页图中我们知道卫星在$P$点时，在地球上能同时看到它的最远点是$F$和$F'$，其中$\angle PFG=20°$。假定卫星在比$P$点高的$Q$点，观测者在$F$点能不能看到卫星呢？这只要看一下，当卫星在$Q$点时，$F$点的卫星仰角是不是大于

20°？从图中可以看出，这个仰角是：

$$\angle QFG = \angle QFP + \angle PFG$$
$$= \angle QFP + 20°。$$

显然它大于 20°。因此卫星在 $Q$ 时，$F$ 点的观测者能够看到卫星。假设观测者从 $F$ 点逐渐向右移动，卫星仰角将从大于 20° 的 $\angle QFG$ 逐渐减小；走到 $H$ 点时，卫星仰角正好等于 20°，则 $H$ 点及与 $H$ 点对称的 $H'$ 点，就是卫星在 $Q$ 时，能同时看到卫星的最远点。很明显，在地球上 $H$ 和 $H'$ 所对应的圆形区域比 $F$ 和 $F'$ 所对应的区域大；也就是说，卫星飞得越高，能同时看到卫星的区域越大。




同时能看到我国第一颗人造卫星的范围究竟有多大呢？如果卫星位于北京天顶时，正好在近地点，那么通过计算，离北京约 900 公里这样一个大圆圈内的一切地方，包括合肥、银川、长春和朝鲜平壤等地都可以和北京同时看到我国的人造卫星，这个范围比西藏自治区还要大一些。如果卫星位于北京天顶时，正好在远地点，那么离北京约 3,000 公

里这样一个大圆圈内的地方都能同时看到我国人造卫星。

我国第一颗人造地球卫星的近地点为 439 公里，而苏联只有 228.5 公里，美国只有 360.4 公里，因此，地球上能看到我国人造卫星的范围是最大的。这个事实充分说明了**“中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平”**。

## 为什么南京长江大桥公路引桥采用双曲拱桥最节省？

你到过南京长江大桥吗？它的公路引桥有一段长长的双曲拱桥。它南岸连续 18 孔，北岸连续 4 孔，使雄伟壮丽的南京长江大桥显得分外妖娆。

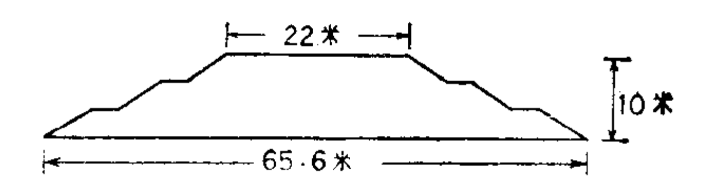
双曲拱桥具有浓厚的民族特色，桥形美、负荷大、用料省、施工快，是我国工人阶级的伟大创造。不过，双曲拱桥用到特大桥梁上，这还是破天荒第一次哩！

毛主席教导我们说：**“任何新生事物的成长都是要经过艰难曲折的。”**这个创举的实现，也经历了一场激烈的斗争。

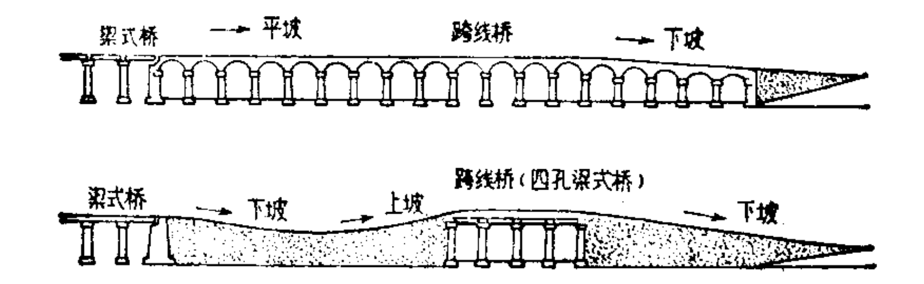
在无产阶级文化大革命以前，走资派支持资产阶级“权威”提出用“高填土”方案做引桥，就是要在现在造双曲拱桥的地方，用土填高、垒成路堤，用以代桥。这不仅非常难看，

而且还要拆迁大量民房，破坏大块农田，阻塞交通，割断水系，每年还得翻修路面。我们可以具体地来看看：

凡填土在6米以上到12米的属高填土，引桥的高填土部分要占全线总长的三分之二。路基顶宽22米，路基底宽随填土高度而变化，在填土高10米的地方底宽达65.6米（如下图），最高填土12米处的路基底宽达74米，旁边还要做排水沟，进行绿化等等，而实际占用土地的宽度还要大于74米，可见全线被路基所占的农田是很大的。




如果采用双曲拱桥，桥墩用地面积大大减少，而且各桥孔下的土地仍可利用。高填土方案中，南岸从公路引桥到跨线桥（桥身跨越沪宁铁路线）一段还打算造成先下坡又上坡，为的是减少一些土方，但行车极为不便。而双曲拱桥是做成平坡，行车条件大为改善。




如果将高填土方案也按双曲拱桥一样做成平坡就又要增加很多土方，投资也要增加。在具体数字方面，建桥工人给我们做了一个简单的对比：采用高填土方案所用的土方

大约为37万多立方米,要比采用双曲拱桥方案所用的土方数大9倍多。路基所占农田的面积和要拆迁的房屋都要多1倍左右。不仅如此,用高填土方案时所需的土方,在南岸要从一公里以外的象山取土,在北岸要从两公里以外的宝塔山取土,都有一定的运距,要花费大量人工和时间。这37万多立方米的土要是用解放牌卡车来装,大约需要近10万辆。要是将这10万辆卡车排成一队,就要有近3,000公里长,相当于从广州到沈阳的距离,也就是说当车队的第一辆车开到沈阳时,最后一辆车还没有离开广州呢!

我们可以清楚地看到,资产阶级"权威"提出的高填土方案是个十足的少慢差费的方案。广大工人、革命干部、革命技术人员坚决反对这个少慢差费的方案,尖锐的揭露了走资派和资产阶级"权威"死抱住高填土方案不放,就是对抗毛主席的自力更生和多快好省的方针。他们决定采用双曲拱桥方案,攻克重重的技术难关,终于用短短的69天的功夫,就建造成功了22孔雄伟壮丽的双曲拱桥,创造了我国建桥史上的奇迹!

双曲拱桥是在两条路线激烈斗争中产生的,采用双曲拱桥方案是完全符合多快好省地建设社会主义的总路线的。双曲拱桥的建成是毛主席革命路线的伟大胜利,是马列主义、毛泽东思想的伟大胜利,是无产阶级文化大革命结出的丰硕成果。

# 船速一定的汽船，在静水中往返一次和有流速时往返一次所费时间一样吗？

这个问题，有人回答说：“这两次往返所费时间是一样的。因为当河水有流速时，比方汽船去时遇到逆流，速度减小了，回来时，就是顺流，速度会增加。所以汽船去时所多花费的时间，跟回来时所节约的时间一抵消，岂不是跟在静水中往返一次，所费去的时间一样多么？”

如果你不仔细地做一番计算，单凭自己的感觉来判断，觉得上面的回答是对的。

现在让我们来计算一下吧：

假设这段水路的单程是50里，汽船的速度是每小时20里，那么在静水中往返一次所费去的时间是：

$$50\times2\div20=5(\text{小时})。$$

同样的路程，当河水有流速时，假定流速是每小时5里，汽船的速度仍是每小时20里。

那么，当逆流时，走完这段水路所花的时间是：

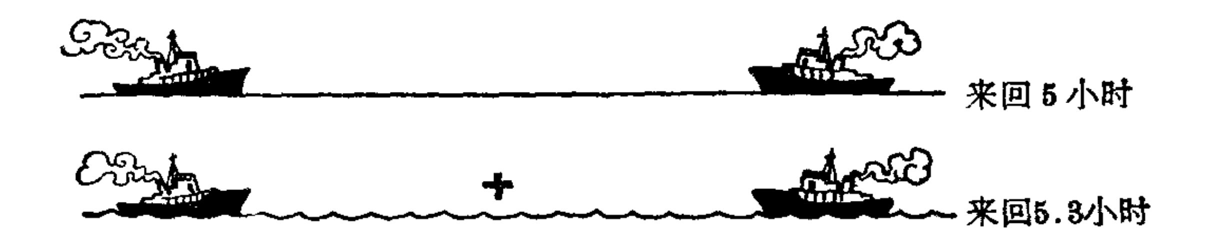
$$50\div(20-5)\approx3.3(\text{小时})。$$

顺流时，汽船走完全程所费的时间是：

$$50\div(20+5)=2(\text{小时})。$$

这就是说，当河水有每小时5里的水流速度时，汽船往返一次所费的时间大约是：

$$3.3+2=5.3(\text{小时})。$$




从上面的计算可以知道：当河水有流速时，行驶速度一定的汽船，它往返一次所花的时间，比在同样距离的静水中往返一次所费的时间较多。

我们再一般地加以推算，设水路的单程用$S$表示，汽船的时速用$V$表示，河水每小时的流速以$v$表示，那么，当逆流时走完全程所费的时间是

$$\frac{S}{V-v},$$

当顺流时汽船走完全程所费的时间是

$$\frac{S}{V+v},$$

往返一次所费的时间是

$$t=\frac{S}{V-v}+\frac{S}{V+v}=\frac{2SV}{V^2-v^2}。$$

当河水是静水，即$v=0$，所费的时间是

$$t_1=\frac{2S}{V},$$

因为 $$V^2-v^2<V^2$$

故 $$\frac{2SV}{V^2-v^2}>\frac{2SV}{V^2}$$

即 $$\frac{2SV}{V^2-v^2}>\frac{2S}{V}$$

这式表明，行驶速度一定的汽船，当河水有流速时，往返一次所花的时间，比在同样距离的静水中往返一次所费的时间较多。

由公式 $t=\frac{2SV}{V^2-v^2}$ 还可说明，当 $S$、$V$ 不变时，$v$ 愈大（设 $v<V$），$t$ 也愈大：也就是说，当河水流速（$v$）愈大时，汽船往返所需时间也愈多！

## 甲船追上乙船所航行的距离，为什么在顺水时比逆水时大？

有两艘船逆水航行，当甲船追赶乙船时，航行 100 公里恰巧赶上。如果它们都是顺水航行，甲船航行 100 公里能赶上乙船吗？

有人这样想：船顺水航行的速度比逆水航行的速度大，甲船不要 100 公里就能赶上乙船了。

事实上，这个想法是不对的。毛主席教导我们："**研究问题，忌带主观性、片面性和表面性。**""**所谓片面性，就是不知道全面地看问题。**"这个想法，是只看到了甲船顺水航行时速度比逆水航行时的速度大，而没有看到乙船顺水航行时的速度也比逆水航行时的速度大；只看见局部而没有看见全体，因此犯了片面性的错误。

有人又这样想：逆水航行时，甲、乙两船的速度都较小；顺水航行时，甲、乙两船的速度都较大，但是甲、乙两船航行速度的差不改变，既然如此，那么甲船航行100公里，当然也能赶上乙船了。

其实，这种想法仍然是错误的。虽然它纠正了上面所说的那种片面性，但却犯了表面性的错误。毛主席教导我们："**表面性，是对矛盾总体和矛盾各方的特点都不去看，否认深入事物里面精细地研究矛盾特点的必要，仅仅站在那里远远地望一望，粗枝大叶地看到一点矛盾的形相，就想动手去解决矛盾（答复问题、解决纠纷、处理工作、指挥战争）。这样的做法，没有不出乱子的。**"遵循毛主席的教导，深入细致地研究一下，就可以知道上面想法的前半部分是正确的，后半部分是错误的。为什么呢？因为：

顺水航行的速度＝静水航行的速度＋水流速度。

逆水航行的速度＝静水航行的速度－水流速度。

当逆水航行时，因为

甲船逆水速度＝甲船静水速度－水流速度。

乙船逆水速度＝乙船静水速度－水流速度。

所以　　甲船逆水速度－乙船逆水速度

＝甲船静水速度－乙船静水速度。

当顺水航行时，因为

甲船顺水速度＝甲船静水速度＋水流速度。

乙船顺水速度＝乙船静水速度＋水流速度。

所以　　甲船顺水速度－乙船顺水速度

＝甲船静水速度－乙船静水速度。

因此，甲船顺水速度－乙船顺水速度

＝甲船逆水速度－乙船逆水速度。

这就是说，甲、乙两船航行速度的差，并不因为由逆水改为顺水而有所改变。

至于上面想法的后半部分的错误在哪里呢？因为甲、乙两船的距离不变，速度之差也不变，甲船赶上乙船所需要的时间也就不变，而不是船行的距离不变。譬如说，逆水航行时甲船赶上乙船需要 8 小时；那么顺水航行时，甲船赶上乙船仍然需要 8 小时。

现在，可以得到正确的答案了。那就是：顺水航行的速度比逆水航行的速度大，所以当航行的时间不变时，航行的距离就比原来的大，因此顺水时甲船赶上乙船所需要航行的距离就要超过 100 公里了。

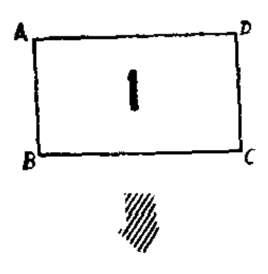
# 为什么在分数的乘法运算中，要先把带分数化成假分数？

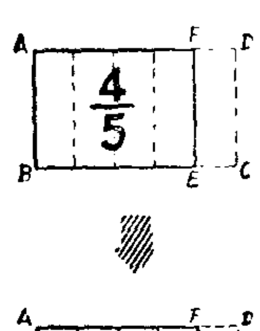
有的同学在开始学习带分数乘法时，常常算错。所以会算错，有时是粗心大意；有时是没有弄清楚分数的乘法法则是怎么得来的，没有深刻理解带分数的意义。我们今天的学习，是同今后参加阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命运动有密切联系的，所以在运算时要有高度的责任感，仔细一点就可以做对了。同时，必须牢记毛主席关于“**认识有待于深化**”的教导，要多思多想，把道理弄清楚，首先要懂得纯分数的乘法法则是怎样来的：

例如：$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=?$

用图形来说明，第 77 页图中的 $ABCD$ 表示单位 1（假如是一块田、一堆货，等等），把 $ABCD$ 分成 5 等分，$ABEF$ 是其中的 4 分，所以 $ABEF$ 表示单位 1 的$\frac{4}{5}$。

再把 $ABEF$ 分成 3 等分，$AGHF$ 就是其中的 2 份，所以 $AGHF$ 表示 $\frac{4}{5}$的$\frac{2}{3}$。




如果把 $ABCD$ 分成 $5\times3$ 等分，那么 $AGHF$ 是其中的 $4\times2$ 份，所以 $AGHF$ 又表示单位 1 的 $\frac{4\times2}{5\times3}$。

因此 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times2}{5\times3}$。

一般地说，两个纯分数相乘，可以把两个分子相乘的积做分子，两个分母相乘的积做分母。即

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}。$$

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times2}{5\times3}$$

这就是纯分数的乘法法则。

其次，还要懂得必须把带分数化成假分数以后，才能应用纯分数的乘法法则。

一个法则的应用范围和它的来历有密切关系。上面所说的纯分数乘法法则是根据纯分数的意义得来的，因此它只适用于纯分数而不适用于带分数。根据带分数的意义，一个带分数等于一个整数和一个纯分数的和。

例如：$3\frac{5}{6}=3+\frac{5}{6}$，　　$213\frac{1}{16}=213+\frac{1}{16}$。

因此，在带分数的乘法运算里，可以先把带分数化成假分数，然后再应用纯分数的乘法法则。

例如：$3\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{23}{\cancel{6}_3}\times\frac{\cancel{2}^1}{5}=\frac{23}{15}=1\frac{8}{15}$。

下面的算式是错误的：

$$3\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{6}_3}\times\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{5}_1}=3\frac{1}{3}。$$

因为它没有把带分数 $3\frac{5}{6}$化成假分数。

要正确合理、迅速地进行计算，不能单纯依靠死记的方法，必须把道理弄清楚，把有关的知识掌握牢，从题目的具体情况出发，灵活运用。

例如：　$213\frac{1}{16}\times8\times\frac{1}{3}$

$$=\frac{3409}{\underset{2}{\cancel{16}}}\times\overset{1}{\cancel{8}}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{3409}{6}$$

$$=568\frac{1}{6}。$$

这样虽然把题目算对了，但是计算很繁。你明确带分数的意义，计算的方法可以选择得更合理一些，算起来就比较迅速。你看

$$213\frac{1}{16}\times8\times\frac{1}{3}=\left(213+\frac{1}{16}\right)\times8\times\frac{1}{3}。$$

我们不一定要先算括号里的结果，也就是说不一定要

先把带分数化成假分数，可以这样算：

$$213\frac{1}{16}\times 8\times\frac{1}{3}=\left(213+\frac{1}{16}\right)\times\frac{8}{3}$$

$$=\overset{71}{\cancel{213}}\times\frac{8}{\cancel{3}}+\frac{1}{\underset{2}{\cancel{16}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{3}$$

$$=568+\frac{1}{6}$$

$$=568\frac{1}{6}。$$

## 怎样判断一个数能不能被2、3、5、9或11整除？

老师在黑板上出了几个算术题：

1. 312,212 能不能被 2 整除？
2. 5,712 能不能被 5 整除？
3. 215,412 能不能被 3 或 9 整除？
4. 412,632 能不能被 11 整除？

你不用笔算，能把结果正确地说出来吗？

这个问题，初看觉得很难，特别是被除数的位数较多时，心算又不可能。这时候，如果你掌握了整除的规律，问

题就不难了。

1. 因为偶数能被 2 整除，所以个位数是 0 或偶数的都能被 2 整除。

312，212 是偶数，所以能被 2 整除。

2. 10、$10^2$、$10^3$……都能够被 5 整除。一个数能不能被 5 整除，在于这个数的个位数。因此只有个位数是 0 或 5 的数，才能被 5 整除。

5，712 这个数的个位数不是 0，也不是 5，所以不能被 5 整除。

3. 由于 $10=9+1$，$10^2=99+1$，$10^3=999+1$，$10^4=9999+1$……这里，9、99、999、9999 都能被 3 或 9 整除。比如说，一个四位数，它可以写成 $a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d=(a\times999+b\times99+c\times9)+(a+b+c+d)$。因为第一个括号里的数，肯定能被 3 或 9 整除，所以原数能不能被 3 或 9 整除，就看各个位数相加的和$(a+b+c+d)$能不能被 3 或 9 整除。




215，412 各位数字的和是 $2+1+5+4+1+2=15$。15 能被 3 整除，而不能被 9 整除，因

此，215,412 这个数能被 3 整除，但不能被 9 整除。

如果一个数目的各位数字的和能被 9 整除，这个数目就能被 9 整除。能被 9 整除的数，一定能被 3 整除。但是，反过来说并不一定成立，以上举的 215,412 就是一个例子。

4．因为$10=11-1$，$10^2=99+1$，$10^3=1,001-1$，$10^4=9,999+1$，$10^5=100,001-1$，$10^6=999,999+1$……这里，11、99、1,001、9,999、100,001、999,999 都能被 11 整除。比如一个六位数 $abcdef$，可以把它写成

$$\begin{aligned}&a\times 10^5+b\times 10^4+c\times 10^3+d\times 10^2+e\times 10+f\\=&a\times(100,001-1)+b\times(9,999+1)+c\times(1,001-1)\\&+d\times(99+1)+e\times(11-1)+f\\=&(a\times 100,001+b\times 9,999+c\times 1,001+d\times 99\\&+e\times 11)+[(b+d+f)-(a+c+e)]\end{aligned}$$

这最后一个式子中第一个括号里的数，肯定能被 11 整除。因此原数能不能被 11 整除，只要看第二个括号里的数能不能被 11 整除就行了；而这个数就是原数的奇数位数字之和，与偶数位数字之和的差数。

现在我们来看开始提出的数：412,632 能不能被 11 整除？

由于 412,632 这个数的奇数位数字的和是$2+6+1=9$，而偶数位数字的和是 $3+2+4=9$。这两个和相减等于 0，因此 412,632 这个数能被 11 整除。

又如 280,918 这个数，它的奇数位数字之和，与偶数位数字之和的差数是 11 的倍数，因此这个数也能被 11 整除。

总之，任何一个题目，只要分析了它的情况，总结出规律来，就能很好地解答它。

## 为什么末位数是5的两位数的平方可以速算？

如果你不用笔算，能很快地说出一个末位数是 5 的两位数的平方数吗？

例如：35 的平方是多少呢？

这类题目，我们利用代数上的知识，可以进行速算。因为末位数是 5 的两位数平方，就等于用比十位数大 1 的数乘十位数，再在所得的积的后面写上 25。

请看：35 的平方，等于十位数 3 加 1 后，乘以十位数 3，即

$$(3+1)\times 3=12,$$

再在这乘积 12 的后面写上 25 就行了，也就是 1,225。

为什么这样速算是对的呢？

原来，任何一个末位数是 5 的两位数都可以写成：$10a+5$，$a$ 代表十位数。

有一个代数公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

因此末位数是 5 的两位数的平方都可以写成：

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 2\times5\times10a + 25$$
$$= 100a^2 + 100a + 25$$
$$= 100a(a+1) + 25$$
$$= a(a+1)\times100 + 25,$$

也就是用 $a$ 乘上比 $a$ 大 1 的数$(a+1)$，然后在它的后面写上 25 就得到它的平方数了。这也就是我们所说的速算法的根据。

## 任何两位数的平方都可以速算吗？

末位数是 5 的两位数的平方可以速算，那么、末位数不是 5 的任何两位数的平方，是不是也可以速算呢？

可以的。譬如：$27^2$、$98^2$……都有办法速算。我们从代数公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

得

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2。$$

上面的各数用最后面的式子运算都比较快。

例如：

$$27^2=(27+3)(27-3)+9$$
$$=30\times24+9$$
$$=720+9$$
$$=729。$$
$$98^2=(98+2)(98-2)+4$$

$$=100\times96+4$$
$$=9,600+4$$
$$=9,604。$$

对于某些两位以上的数，也可以用这个方法进行速算。

例如：$104^2=(104-4)(104+4)+16$
$$=100\times108+16$$
$$=10,800+16$$
$$=10,816。$$

如果你熟练以后，把中间的步骤省掉，就可以很快地算出来了。

## 为什么有些乘法可以速算？

工农业战线上去了，商业战线怎么办？上海市许多商业单位的职工，学先进，揭矛盾，决心要当好工农业生产的促进派，"完全""彻底"为工农兵服务。他们身站柜台，胸怀全球，坚持为工农兵服务的政治方向，不断提高服务质量，既当为工农兵服务的勤务员，又做个执行毛主席革命路线的战斗员。广大商业战线职工，为了对人民和企业负责，必须掌握准确和迅速的数字计算。很多商业人员有很好的心算、速算的技巧，对于一些复杂的计算，能很快算出正确答案来。他们除了刻苦锻炼外，还有一些窍门，也就是说，他

们掌握了一些速算的规则。

假设有两个二位数相乘，其十位数是相同的，而个位数的和是 10，就可以进行速算。

例如：$74\times76=?$

我们可以用十位数字，乘以比十位数字大 1 的数，就是

$$7\times8=56。$$

再用原来两个数的个位数字相乘，即 $4\times6=24$。最后把两个乘积写在一起，即 5,624，这个数就是 $74\times76$ 的乘积。

如果两个数的个位数是 1 和 9，把两个乘积写在一起时，9 的前面要添一个 0，以补足两位。例如：$71\times79=5,609$，而不是 569。

这是什么道理呢？因为

$$\begin{aligned}&(10a+b)(10a+c)\\&=100a^2+10ab+10ac+bc\\&=100a^2+10ab+10a(10-b)+bc\quad(\because b+c=10)\\&=100a^2+10ab+100a-10ab+bc\\&=100a(a+1)+bc。\end{aligned}$$

这个办法也可以推广到多位数。譬如：

$$497\times493=?$$

我们就可以用上面的简捷办法：

$$49\times50=2,450,\quad 7\times3=21,$$

因此 $\quad 497\times493=245,021$。

# 为什么接近于100、1,000……的两数相乘，可以进行速算？

各类题目速算的规则是不相同的，光拿乘法来说，就有二十几种。但是要经常使用才能熟练。

下面三种乘法速算，在实际应用中，是很有用的方法。

一、在两个数相乘时，如果它们都是比100、1,000等等略大的数，那么可以采用下面的简捷乘法：

（1）先将乘数最左边的1划去，然后与另一乘数相加；

（2）在所得之和的数码后面添上一些0（如果两个乘数都略大于100，就添上两个0；如果它们都略大于1,000，就添上三个0等等）；

（3）再将两个数的零头相乘；

（4）把（2）和（3）两步所得的数相加，就得到了答案。

例：108×103＝？

（1）　　1̸ 0 8

　　　＋1 0 3

（2）　1 1 1 0 0

（3）＋　　2 4……（3×8）

（4）　1 1 1 2 4

$\therefore \quad 108\times103=11,124$。

为什么可以这样进行速算呢?

这样作法的理由如下:

设两个乘数为 $10^a+h$ 和 $10^a+k$, 这里 $a$, $h$, $k$ 都是正整数,则 $(10^a+h)(10^a+k)=10^a\times(10^a+h+k)+hk$,

而 $\qquad 10^a+h+k=(10^a+h)+(10^a+k)-10^a$。

二、在两个数相乘时, 如果一个乘数比 100、1,000、10,000 等等的数略大,而另一乘数略小, 就可以用下面的简捷乘法来速算:

(1) 先将较大的乘数的最左端的数码 1 划去, 然后与另一乘数相加;

(2) 在所得的和的后面添上一些 0(如果乘数略大或略小于 100,就添上两个 0;如果略大或略小于 1,000,就添上三个 0 等等);

(3) 将较大乘数的零头数,与较小乘数的补数相乘;

(4) 把(2)和(3)两步的得数相减,即得所求的结果。

例: $1006\times995=?$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \phantom{+\ 10}1006 \\
 & \underline{+\ \phantom{10}995\phantom{000}} \\
(2) & \phantom{+\ 10}1001000 \\
(3) & \underline{-\ \phantom{100000}30}\cdots\cdots(6\times5,\text{因为较小的乘数 995 的补数是 5}) \\
(4) & \phantom{+\ 10}1000970
\end{array}
$$

$\therefore \quad 1006\times995=1,000,970$。

这样作法的理由是:

$$(10^a+h)(10^a-k)=10^a(10^a+h-k)-hk,$$

而括弧中的

$$10^a+h-k=(10^a+h)+(10^a-k)-10^a。$$

三、两个数相乘，如果它们都是比 100 或 1,000 或 10,000 等等略小的数，可以按照下面的步骤进行速算:

(1) 将两个乘数相加，并划去所得的和的最左面的1;

(2) 在所求得的数的后面添上0(如果两乘数都略小于100，就添上二个0；如果它们都略小于1,000，就添上三个0等等);

(3) 把两个补数相乘起来;

(4) 把(2)和(3)两步的得数相加，即得所要求的结果。

例: $998\times987=?$

$$\begin{array}{lr} (1) & 998 \\ & +\quad 987 \\ \hline (2) & \not{1}985000 \\ (3) & +\qquad 26 \cdots\cdots(2\times13) \\ \hline (4) & 985026 \end{array}$$

$\therefore \quad 998\times987=985,026$。

这样作法的理由是:

$$(10^a-h)(10^a-k)=10^a(10^a-h-k)+hk,$$

而 $10^a-h-k=(10^a-h)+(10^a-k)-10^a$。

这个题目，拿普通乘法与它对比一下，就可以知道速算的便利了。

$$\begin{array}{r} 998 \\ \times\ 987 \\ \hline 6986 \\ 7984\phantom{0} \\ 8982\phantom{00} \\ \hline 985026 \end{array}$$

我们曾经做了一个实地试验，用速算法与不用速算法所花费的时间，大约为 1 与 5 之比。

## 三句口诀可以做珠算除法吗？

算盘，这个我国传统的“数字计算机”，到现在仍为广大劳动人民普遍使用。用珠算做加、减法，的确比手摇计算机还快。不过，用珠算做除法，由于要记很多口诀，而旧有的一套口诀，很烦琐，又不好记，计算起来就比较慢。

近年来，人们从生产实践中，对珠算除法给以整理、总结，创造了一些较好的方法，如“加除法”、“减除法”、“商五法”等。这里介绍一种珠算除法，能结合上面三种方法的长处，简便可行，易学易用。

这种珠算除法的口诀是：

大数隔位加一，隔位减去除数，

到半上位进五，不隔减半扣除。

小半上位进一，隔位减去除数。

现在举例加以说明，先从除数是一位数的除法讲起。

例一：816÷6＝136。

在算盘上拨好除数与被除数，除数在左，被除数在右，两者相隔几档，如右图。



① 比较除数和被除数，因为除数是一位数，就取被除数的前一位和它相比较(除数是二位数时，就取被除数的前二位加以比较，依此类推)。8 比 6 大，所以可以应用第一句口诀："大数隔位加一，隔位减去除数"(注意：这里所说的大数，也包括两者相等的情况，即大于或者等于的意思)，于是在被除数左边隔开一位拨上商 1，再在商的右边隔一位减去 6，如右图。

② 再拿 2 与 6 比较，因为 6 的一半是 3，而 2 小于 3，所以用第三句口诀："小半上位进一，隔位减去除数"，于是就在 2 的左面一位拨上 1，再隔位减去 6，如右图。

③ 这时因为余数 156 的第一位仍旧小于除数 6 的一半，因此还是继续用第三句口诀，就得到如右图的结果。

④ 因为 9 比 6 大，所以用第一句口诀，得到右图的结果。

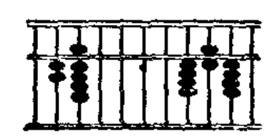


⑤ 拿余数 36 的 3 与除数 6 比较．3 是 6 的一半，所以要用第二句口诀，在 3 的左面一位拨上商 5，再减去除数的一半 3，如右三图。

⑥ 最后再应用第一句口诀，就得到商数 136，如下图。

以上这些步骤，由于逐步分析，所以看来似乎是较繁一些，其实，熟练以后，结果可以很快地得出来。

下面再举一个除数为二位数的除法，以供读者参考：

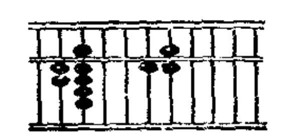


例二：$464 \div 29 = 16$

① 因为 46 比 29 大，所以可用第一句口诀，得到右图。

② 17 比 29 小，而大于 29 的一半，所以可用第二句口诀，就在 1 的左面一位拨上商 5，再从 5 的右面一位起减去除数 29 的一半，即 14.5，于是得到左图。

③ 现在显然可以再用一次第一句口诀，就得到商数 16，如右图。



# 为什么公历有闰年，夏历有闰月？

广大贫下中农遵照伟大领袖毛主席“**抓革命，促生产**”和“**不违农时**”的教导，牢固树立了为革命种田的思想，按照农业生产季节性强的特点，充分利用时间，合理安排劳动力，按时抢收抢种，夺得了农业产量年年丰收。

农业上的农时，是按照我国现在通用的公历和夏历来制定的，公历一年为365天，逢到闰年为366天。因为平年2月份只有28天，闰年二月份就有29天。夏历每年只有354天或355天；逢到有闰月的一年，就有384天或385天。因为夏历一般每月只有29天或30天，逢到有闰月的年，就多加一个月。

为什么公历有闰年，夏历有闰月呢？

现今世界上各国通用的公历，是根据罗马人的“儒略历”改编而成的。天文学上把地球绕太阳从春分点回到春分点的时间，称为一个回归年，其长度是365.2422平太阳日。但是儒略历却以$365\frac{1}{4}$日为一回归年，规定每年（平年）为365日，每四年有一个闰年为366日。到公元325年，儒略历为当时信奉基督教的国家所采用，这一年的春分日是3月21日。由于儒略历的平均历法年比回归年长0.0078平太阳日（即平均每年约长11分14秒），这样从公元325

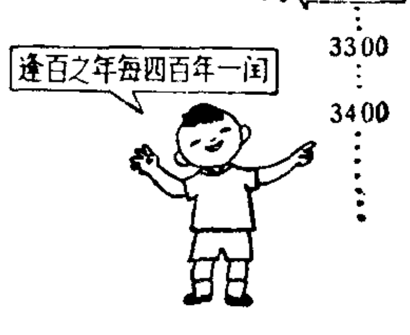
年开始，积累到1582年，两者相差竟达十天，结果3月21日的春分日提早到3月11日。为了避免这些误差，人们特规定1582年10月5日为1582年10月15日；并将设置闰年的办法，也给以明确规定：以公历纪元为标准，凡是能被4整除的年是闰年；但逢百之年，能被4整除的并不是闰年，必须要能被400整除的才是闰年。例如1968年能被4整除，是闰年。1900年是逢百之年，能被4整除，却不能被400整除，所以不是闰年，而2,000年又将是闰年。凡是闰年，在二月份增加一天，全年为366天。

现在还在使用的夏历（又叫农历），它的特点是：即重视月相盈亏的变化，又照顾寒暑节气。它规定大月30日，小月29日，因为月相变化

1943
闰 1944
1945
1946
1947
闰 1948
1949
1950
1951
闰 1952
1953
1954
1955
闰 1956
1957
1958
1959
闰 1960
1961
1962
1963
闰 1964
1965
1966
1967
闰 1968
1969
1970
1971
闰 1972
1973
1974
1975
闰 1976
1977
1978

闰 1600
1700
1800
1900
闰 2000
2100
2200
2300
闰 2400
2500
2600
2700
闰 2800
2900
3000
3100
闰 3200
3300
3400



一周的时间(天文学上叫做一个朔望月)是 29.5306 日。这样，几个月的平均值就很近似于“朔望月”的长度。因此平年有 12 个月，全年只有 354 日或 355 日，与回归年平均约差 10 日 21 时。为了纠正这个误差，所以规定每三年中加一个闰月，五年中加两个闰月，十九年中共有七个闰月，以求年月的结合；这样夏历的闰年共有 13 个月，全年有 384 或 385 日。通过这么巧妙的安排，使每月所代表的节气相差不致太大，不过夏历的闰月不象公历总是规定在二月份；还有交节气的日子，不象公历那样大体上固定，它的计算也较复杂，平年与闰年的日数相差很多天，所以采用公历比夏历普遍而便利。不过我们查一查《万年历》这本书，就可以清楚地知道农历哪一年是闰年，闰的是哪一个月了。

⋮
1948
1949—己丑年〈闰七月〉
1950
1951
1952—壬辰年〈闰五月〉
1953
1954
1955—乙未年〈闰三月〉
1956
1957—丁酉年〈闰八月〉
1958
1959
1960—庚子年〈闰六月〉
1961
1962
1963—癸卯年〈闰四月〉
1964
1965
1966—丙午年〈闰三月〉
1967
1968—戊申年〈闰七月〉
1969
1970
1971—辛亥年〈闰五月〉
⋮



# 不翻日历你能算出随便哪一天是星期几吗？

如果你要想知道历史上一些重要日子，或是未来随便哪一天是星期几，不翻日历，能计算出来吗？

根据历法原理，按照下面的公式计算，就可以知道某年、某月、某日是星期几了。

这个公式是：

$$S=x-1+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+C。$$

这里 $x$ 是公元的年数，$C$ 是从这一年的元旦算到这天为止（连这一天也在内）的日数。$\left[\frac{x-1}{4}\right]$ 表示为 $\frac{x-1}{4}$ 的整数部分；在计算 $S$ 时，三个分数式只要商数的整数部分，余数略去不计，再把其它几项依次加减，就可得到 $S$。

求出 $S$ 以后，用 7 除；如果恰能除尽，这一天一定是星期日；若余数是 1，那么这一天是星期一；余数是 2，这一天就是星期二，依此类推。

例 1： 1921 年 7 月 1 日，中国共产党在上海成立。你可知道 1921 年 7 月 1 日是星期几？

按上面的公式，可得：

1920 + 480 − 192 + 4 + 184 = 2795

$$S=1921-1+\left[\frac{1921-1}{4}\right]-\left[\frac{1921-1}{100}\right]$$

$$+\left[\frac{1921-1}{400}\right]+(31+28+31+30+31+30+1)$$

$$=1920+480-19+4+182$$

$$=2567。$$

$2567 \div 7=366 \cdots\cdots 5$。

所以 1921 年 7 月 1 日是星期五。

例 2： 1949 年 10 月 1 日是伟大的中华人民共和国成立的日子，这一天是星期几？

按上面公式计算，可以知道：

$$S=1949-1+\left[\frac{1949-1}{4}\right]-\left[\frac{1949-1}{100}\right]$$

$$+\left[\frac{1949-1}{400}\right]+(31+28+31+30+31+30+31$$

$$+31+30+1)$$

$$=1948+487-19+4+274$$

$$=2694。$$

$2694 \div 7=384 \cdots\cdots 6$。

所以 1949 年 10 月 1 日是星期六。

例 3： 1984 年元旦是星期几？

按上面公式可得：

$$S=1984-1+\left[\frac{1984-1}{4}\right]-\left[\frac{1984-1}{100}\right]$$

$$+\left[\frac{1984-1}{400}\right]+1$$

$$=1983+495-19+4+1$$

$$=2464。$$

$$2464\div7=352。$$

所以 1984 年元旦是星期日。

## 为什么要学习近似计算?

大家都已学过对准确数的运算，譬如对准确数的四则运算、乘方运算等等。这些运算是最基本的，因而学习它是十分必要的。

但是，仅仅学习准确数的运算是很不够的，还必须学习近似计算知识，因为在工农业生产和日常生活中所用到的数，多半是近似数，如计算重量、距离、速度、时间、温度、面积、体积等所得到的数，一般都不是准确数，而是近似数。

譬如统计我国各省市人口数，都用“万”为单位的近似数来表示；“万”以下的数字，就用舍入法来处理。如某城市有 124 万人口，那么这个“124 万”的近似数，一般最大误差不超过五千。倘如统计时要求精确到百或十，甚至精确到

个位，这是没有必要的，而且会浪费大量劳动力。可见怎样才算精确？必须对于具体情况作具体的分析。

准确数与近似数是不同质的数，因此它们的运算方法也是不同的。

举个简单的例子来说：我们知道人类社会的历史发展到现在大约一百万年，那么过了三十年以后，人类社会应该算作有多少年历史呢？

这虽然是一个十分简单的问题，倘若不懂初步的近似计算，很可能会认为一百万零三十年的结论，才是百分之百正确的。事实上并不然。大家知道“一百万年”不是准确数，因此决不能把这问题归结为是准确数相加的问题。因为前一数的最大误差大大超过三十年。根据近似数加法原则，可以得出这样一个结果：小的一数可忽略不计。因此，过了三十年以后，我们仍说人类社会有一百万年的历史。

如果我们学习了近似计算，就知道近似数之间该怎样运算了。

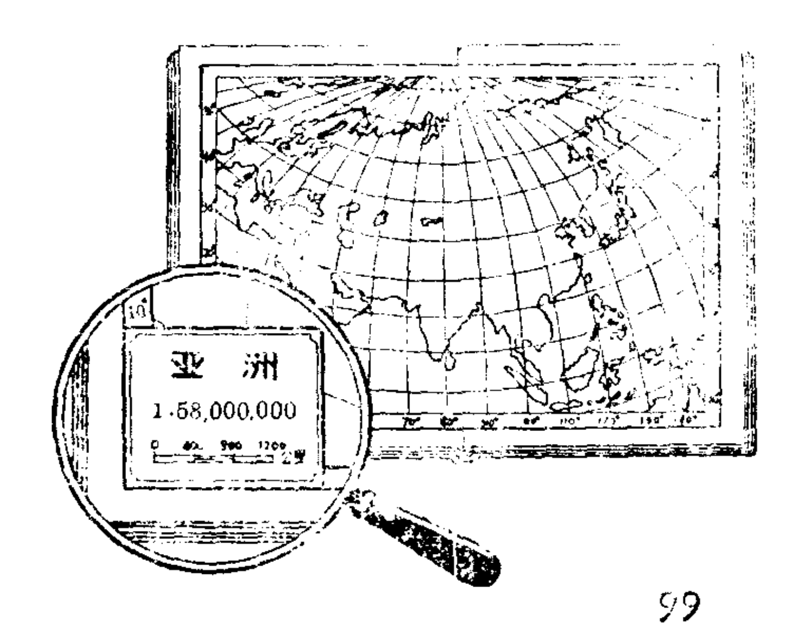
在近三十年出现了快速电子计算机以来，特别是近代科学技术（如人造卫星上天等等）对近似计算的要求更高、更为迫切，从而也促进了近似计算的迅速发展。因此我们也有必要学习近似计算知识。

# 什么叫做比例尺?

在无产阶级文化大革命初期，许多红卫兵小将怀着对伟大领袖毛主席的无比热爱，学习红军万里长征的革命精神，扛着“长征队”队旗，身背背包，胸怀朝阳，以顽强的革命毅力，跋山涉水战胜重重困难步行到无产阶级文化大革命的中心，我们伟大领袖毛主席居住的地方——我们伟大祖国的首都北京进行革命的串连。在路上他们努力学习毛主席著作，宣传马列主义、毛泽东思想。

小将们在长征中，常常用到地图，从地图上的比例尺，就可以估计出每天行军的路程。你知道地图上的比例尺是什么意思吗?

譬如下面的一张亚细亚洲的地图上就附有“1:58,000,000”和标有0到1,200公里的一个尺，这就是比例尺。这里1:58,000,000是说明地图的大小和实在地面大小的比，即地图上如果两点相距1厘米，那么实际上这两个地点

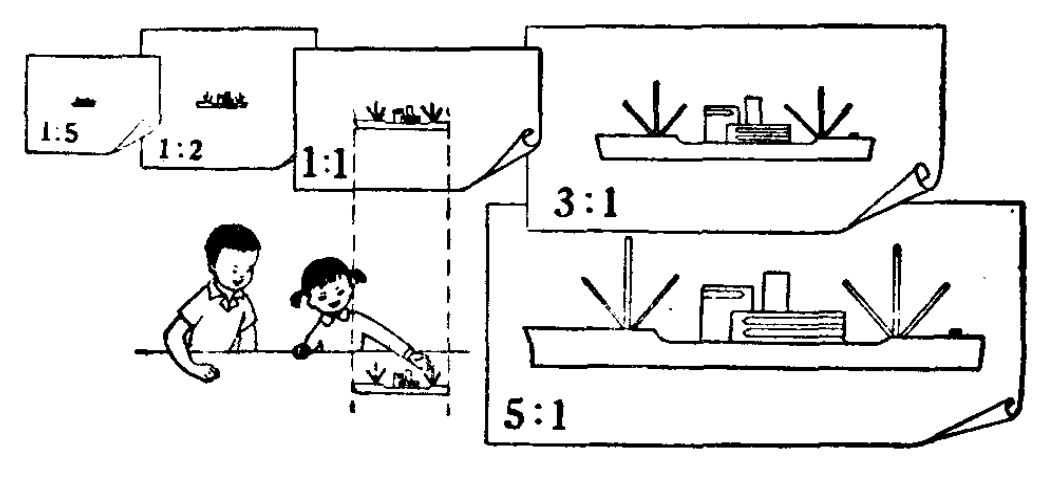


相距 58,000,000 厘米，即 580 公里。

这个比的前项总是 1，后项是缩小的倍数。譬如 1:58,000,000 是表示地图把实际大小缩小到$\frac{1}{58,000,000}$。那么既然说明了这个缩小的比，还要下面那个尺做什么用呢？

这个尺放在那里，是便于我们观测地图上两点间的距离，不必再进行计算。譬如我们用一条硬纸把这个比例尺画上去，拿它在地图上量任意两点间的距离，不必进行计算，就可以在这个尺上直接读出它们的距离。

在建筑图纸上，或是工厂里制造零件的设计图纸上，也往往标有缩小或放大的比，习惯上也叫它做比例尺。譬如某一个零件的设计图纸上标出 1:1，就是说图样的大小与实长相等。标出 1:2 的，就是图样的大小是实际大小的二分之一，即实长是图样上的长的 2 倍。在制图的时候，机器零件一般的缩小比例规定是 1:1，1:2，1:5，1:10，1:20，1:30，1:50，1:100 等。在建筑图样上，一般的比例尺是



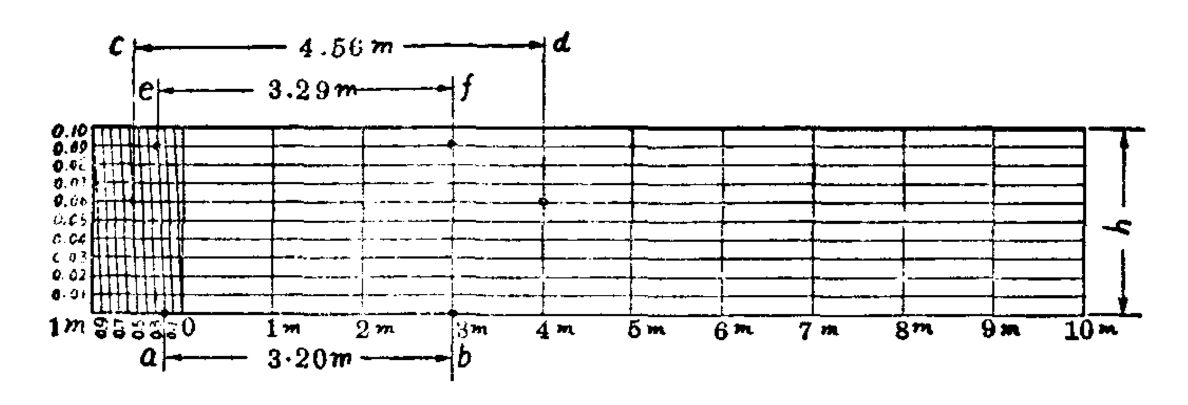
1:100, 1:200, 1:400, 1:500, 1:1,000 等，因为这样比较容易计算。在制图的时候，也有把图画得比原来的实物大的。特别是一些微小的精密零件的图纸，放大的比一般也有规定，大概有 3:1， 5:1， 10:1， 20:1， 50:1……等。比的前后项都是 1 时，表示图形与实物大小相同。比的前项是 1 时，表示图形比实物缩小。比的后项是 1 时，表示图形比实物放大。

为了画图方便，避免随时计算，在制图工具里，有一根叫三棱尺，它的三个面六条边上标有不同比例的尺，如果尺的某一边是 1:1， 尺上标出的长度就是实际长度。如果是 1:2，尺上标出来的长度就是实际长度的 2 倍，用这一边的尺来画图，就得到把实长缩小到 $\frac{1}{2}$ 的图形了。



还有一种叫做分数比例尺(对角线尺)，下面就是一个 1:100 的分数比例尺。图上 1 厘米长的线段写做 1m，所以实长是 1 米的线段，用这个尺画上去的图上线段就是 1 厘米。分数比例尺的用处是可以利用尺的左端量出较小长度的线段。这里可以量到 0.01m。譬如要作一个线段 4.56m，那么就在左端标有 0.06 这一横线上去量，这一横线上有许

多斜线，这些斜线的每一格是 0.1，在它与斜线 0.5 相交之处($c$)，就是所得的一点，连结线段 $cd$ 就等于 4.56m。又如 $ef=3.29$。这样画起来比较准确，又很方便。

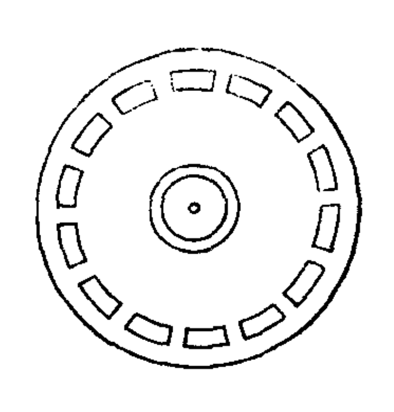



## 为什么用分线规可以把线段或圆周任意等分？

在生产上，设计打图样的时候，我们往往需要把线段或圆周作任意等分。贫下中农遵照毛主席“**必须把粮食抓紧，必须把棉花抓紧，必须把布匹抓紧**”的教导，为了保证丰产丰收，颗粒归仓，普遍使用了电动稻麦两用脱粒机。农具厂在制造电动稻麦两用脱粒机时，钳工要在脱粒机的端面花盘上开十四个等距孔，在数学上这就是一个把圆周作十四等分的问题。

把线段作任意等分，单用圆规和直尺，在几何学中是完全办得到的；可是把圆周作任意等分，却不一定办得到。无

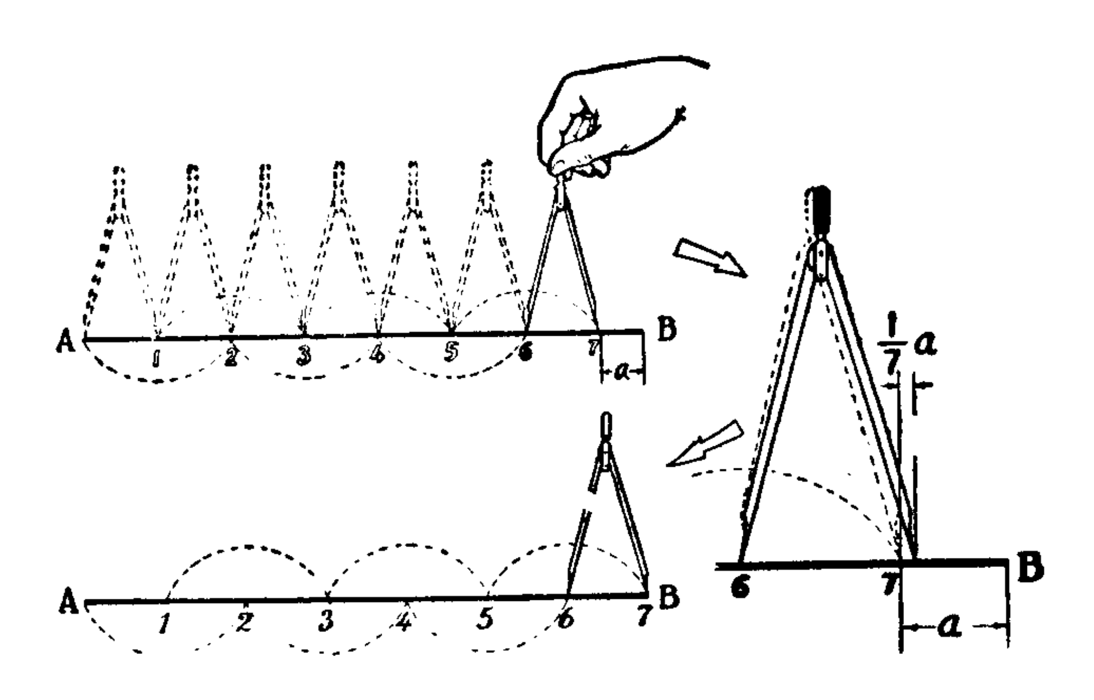
论等分一条线段也好，等分一个圆周也好，如果单用圆规和直尺来分，那就至少要作一些平行直线，有时还要作一些圆，手续是很麻烦的。在实用上，要使用其他的办法。



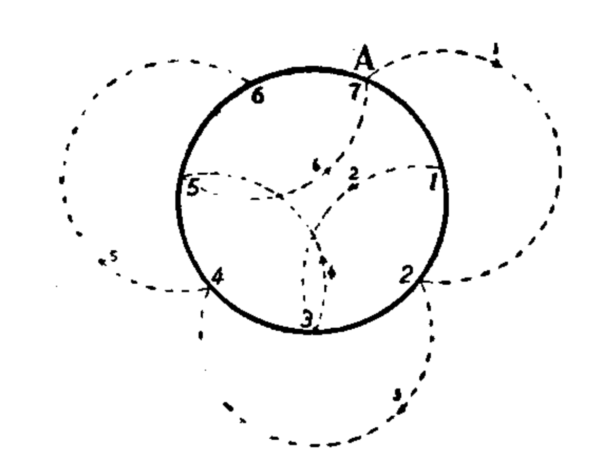
广大工农群众和革命的知识分子在长期的生产斗争中创造了许多种任意等分线段和圆周的方法。现在介绍一种叫做分线规的绘图仪器，利用它就可以把线段或圆周任意等分，而且还可以用它来量度线段。

分线规，又叫做分割规，它的形状和圆规一样，只是它的两脚都是针尖。为什么用分线规可以把线段或圆周任意等分呢？

我们先来看一下，怎样用分线规来等分一条线段。方法是：根据这条线段的总长度，要分多少等分，先估计每一等分的长度，再用分线规，按照这个估计的长度，照下页上图那样初步作出所求的各等分。这样做，当然有误差，但是很容易校正。如果要把线段 $AB$ 分做七等分，而初步作出的第七分点和 $B$ 点还相差一段很小的长度 $a$。这时，你可以把两个针尖间的距离加长七分之一 $a$ 。因为 $a$ 很短，即使多做几次也不困难。完全校正后，最后一个等分点恰巧落在 $B$ 点，七等分一条线段 $AB$ 就算完成了。有经验的人，不消两三次就能完成线段的等分。




至于等分圆周，方法基本上和等分线段一样。所不同的，只是最后一个分点应该仍旧落在起点 $A$ 才算完成。倘若最后一个分点和 $A$ 点还相差很小的一段距离的话，也可以用上面所讲的方法，逐次进行校正。




按照上面的方法来等分线段和圆周，都很准确。

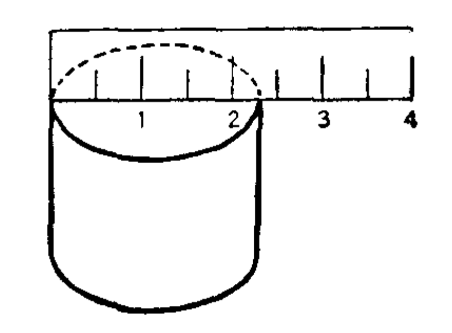
这是为什么呢？因为分线规的脚，是极细的针尖，它比用任何尖笔画出来的点还要小。因此，一个分点是不是恰好落到画纸的终点（对圆周来说，终点就是起点）上，是很容易分辨的。

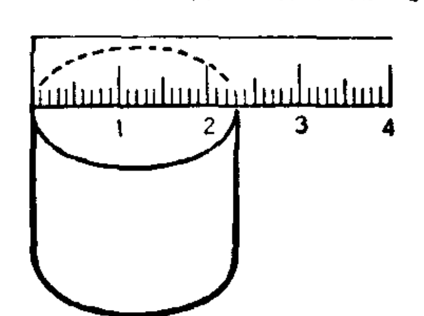
正因为分线规有这样的优点，我们还可以利用它更准确地量度线段，方法是：先把分线规的两个针尖分别放在线

段的两个端点上，然后不改变分线规张口的大小，把它移到有刻度的直尺上，使一个针尖落在直尺的一端刻度0处，这时另一个针尖就指出了所量线段的长度。

## 为什么游标卡尺比普通直尺量得精确？

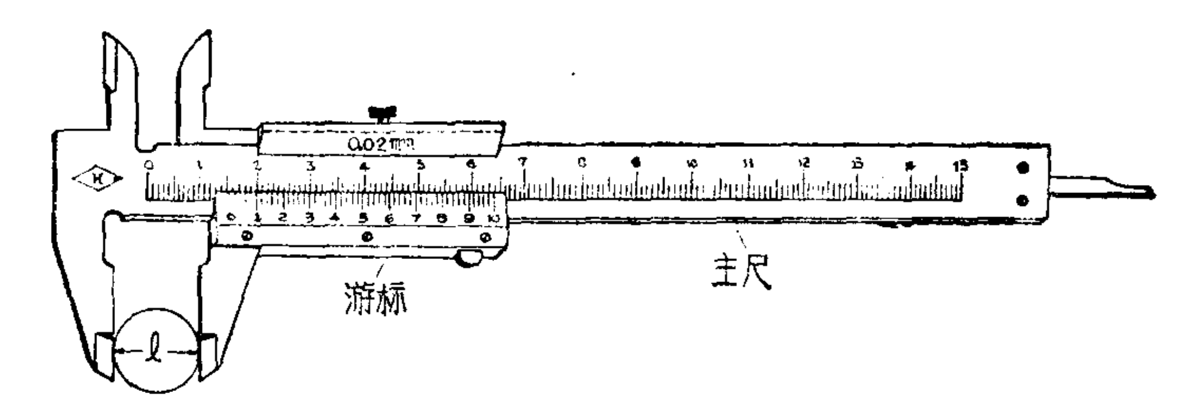
要知道一块钢板有多长、多宽、多厚，一根圆钢有多粗，平时用直尺可以量得它们的大小尺寸。如下图，我们用一根刻度较粗的尺去量一段圆钢的直径，从尺的刻度可看出它的直径在2厘米与2.5厘米之间。但在工业生产中，某些产品量得这样粗糙是不行的。现在工人老师傅用的钢皮尺，每一个毫米（十分之一厘米）有一格刻度。如果用钢皮尺来量这段圆钢的直径（如左图），那么量得的结果是2.3厘米。这比用普通直尺量得的数，精确得多了。但要量得更精确的结果，靠这根钢皮尺也是不行的。也许你会说，是不是可以把尺子的刻度，刻得再细一些呢？这在道理上是对的，但在实际上却行不通。假如我们要在一个毫米中再刻上五格或十格，这样刻是很困难的，因为刻线本身也要有一定的宽度。即使刻成了，看起来也看不清楚，



非得用放大镜不可。用什么方法才能使量得精确，而且使用起来又方便呢？劳动人民在长期实践中创造的“游标卡尺”，就能担当起这个任务。

下图是一把最普通的游标卡尺。左边的两只脚就是卡钳，右边一只脚可以沿尺的方向左右滑动。这样，两只脚可以把要量的东西紧紧卡住，量出其长度、直径等。中间有刻度的尺，称为主尺。下面有 50 小格刻度的，称为“游标”。利用这游标，就可以提高测量的精确度。当卡钳的两只脚并拢时，游标上的左面第一根线与主尺上的第一根线(标 0 的线)对齐。

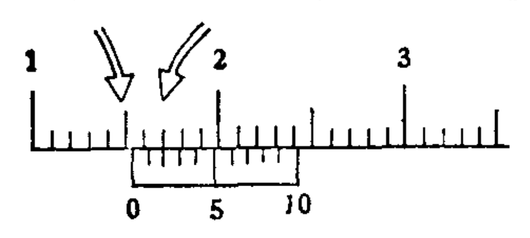



怎样用游标卡尺来量各种零件的尺寸呢？

第一步，把要量的零件放在卡钳的两脚之间卡紧；如上图所示；

第二步，看游标上左边第一根线对应在主尺上的什么位置，如在 15 毫米与 16 毫米之间，我们就知道要量的尺寸是在 15 毫米与 16 毫米之间(为了说明方便起见，下面特采用游标刻度是 10 小格的一种作为例子)；

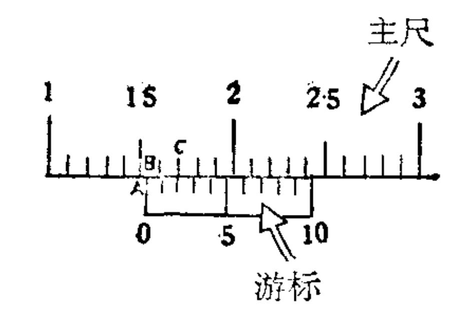
第三步，看游标上的哪一条刻度线，与主尺上的刻度线对齐；如下面放大的图上看出，第三条线与主尺上的刻度线




对齐，这时，我们在原来基础上再加上 0.2 毫米。如果第四条线与主尺刻度线对齐，则要加上 0.3 毫米，依此类推。如左图所量得的最后结果是 15.2 毫米（或 1.52 厘米）。

这样量的道理在哪里呢？

这只要说明为什么第三步中能最后确定零件总的长度为 15.2 毫米。原来这游标上共刻有 10 个小格，每格为 0.9 毫米，10 格共 9 毫米。现在我们设主尺上表示 15 毫米的刻度线所对应的点为 $A$（如下图）；游标上第一根刻度线（标 0 的线）所对应的点为 $B$；游标刻度线和主尺刻度线对齐的那个点为 $C$。我们所量得的总距离，就是主尺上第一根刻度线到游标上第一根刻度线，即到 $B$ 点的距离；但它到 $A$ 点的距离为15毫米，




我们再看看 $A$、$B$ 之间的距离该怎么计算？

因为　$A$、$C$ 之间的距离 = 1 毫米 × 2 = 2 毫米，

　　　$B$、$C$ 之间的距离 = 0.9 毫米 × 2 = 1.8 毫米，

所以　$A$、$B$ 之间的距离 = 2 毫米 − 1.8 毫米

　　　　　　　　　　　= 0.2 毫米，

所以　　总距离＝15 毫米＋0.2 毫米＝15.2 毫米。

上面我们介绍了普通游标卡尺的使用方法和原理。

现在一般用的游标卡尺，它的游标不是刻 10 格，而是 50 格；每一小格不是 0.9 毫米，而是 0.98 毫米，50 格共 49 毫米。这样的游标卡尺量起来可以精确到 0.02 毫米，当然其原理还是一样的。你不妨可以去找一把这样的游标尺来量一量，再想一想它的道理。

## 为什么分厘卡能量出比头发还要细的东西？

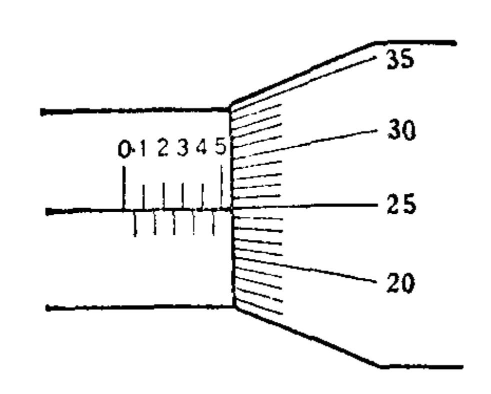
我们伟大祖国的社会主义建设事业蒸蒸日上，工农业生产以惊人的速度向前飞跃。随着工业生产的发展，对于产品或零件的测量要求，也越来越严格，这就需要有精密的测量工具。"游标卡尺"只能使测量精确到 0.02 毫米。但工业生产中，常常需要使测量精确到 0.01 毫米，以至 0.001 毫米。0.01 毫米，即一个毫米的百分之一，通常称为"1 丝"。一根火柴棒的宽度大约是 2 毫米，一丝相当于火柴棒宽度的两百分之一。一根头发的直径大约是 6 丝到 7 丝。

工厂里，工人师傅用"分厘卡"这种量具，就能量出比头发还细的物体的尺寸。



向右移动0.5毫米。刻度$D$上面一圈，共分有50个相等的小格子。如果因旋转而移动了一小格，那就是转了$\frac{1}{50}$圈，这时平面$B$就移动(向左或向右)$\frac{0.5\text{毫米}}{50}=0.01$毫米。由此我们可以看出，圆盘刻度上的每一小格就代表了0.01毫米，也就是一丝。

现在我们总结一下"分厘卡"的用法：先把要量的东西放在$A$，$B$两个平面之间，旋动$F$和$G$，使$A$，$B$正好卡住被量物件(不能用力太大，以免损坏分厘卡)；然后先看主尺刻度上有几个毫米，再看圆盘刻度上有几个丝，加进去就是被量物件的尺寸。如在上页图中所表示出来的，被量的圆球直径为9毫米+0.04毫米=9.04毫米，或9毫米零4丝。



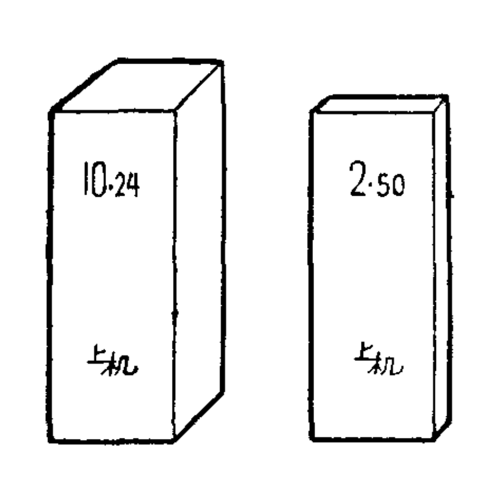

你能从左面画出的刻度中看出被量的东西是多少毫米吗？

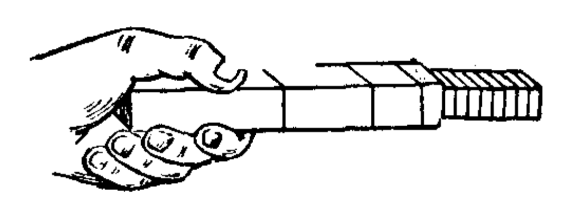
实际上，现在工业生产中还有更精确的测量工具，它能量出比一丝还要小得多的东西。比如我国已能生产出精密度很高的"块规"；它量起来可以精确到一丝的十分之一(即一毫米的千分之一)。

## 用什么方法测量长度，能使误差不超过半丝？

在日常生活中，我们用来测量长度的最普通的工具是尺，它的精确度是半分(即测量结果与实际长度之差不超过半分)，刻度精细的钢皮尺的精确度为$\frac{1}{2}$毫米(即：0.5mm)。在工厂里，为了使产品质量达到一定规格，因此在加工过程中，经常要对零件进行检验，所要求的精确度往往比0.5mm高。例如：5丝(即0.05mm)，就比一根头发丝的直径还要小(一根头发丝的直径大概是7丝，即0.07mm左右)，这时直尺与钢皮尺都无能为力，必须使用精确度较高的工具，如游标卡尺、千分尺等。如果要求测量的误差不超过半丝(0.005mm约头发丝直径的$\frac{1}{14}$)，那么游标卡尺与千分尺也无能为力了，必须采用精确度更高的叫做“块规”的测量工具。块规在工厂里被称为基本量具，因为其它各种量规和量具如游标卡尺、千分尺、千分表等可能由于温度、磨损或其它因素而影响了它们的精确度，这样，用它们来测量零件，势必降低产品的质量，所以必须经常用精确度很高的“标准”加以校验，以保证它们的精确度。在工厂里，担任这项校验工作的“标准”，就是块规。

块规是由特殊铬钢，经过很多道高精密度的工序而制成的长方体(如左图)，对于两个工作面(用以测量长度的面)的中心长度、平行性等都必须符合极严格的要求，把两块块规的工作面放在一起，会产生很大的粘合力(大约 30 千克/厘米$^2$)，如果许多块规由大到小放在一起，我们可以拿住最大的一块，把这一连串块规提起来或横过来，其它的不至于掉下去(如右图)。



块规的品种很多，有通用的，也有专用的。一套 87 块的通用块规其组成如下：(单位：mm)

| | |
|---|---|
| 1.005 | 1 块 |
| 1.01、1.02、1.03……1.49 | 49 块 |
| 1.6、1.7、1.8、1.9 | 4 块 |
| 0.5、1、1.5……9.5 | 19 块 |
| 10、20、30……100 | 10 块 |
| 1、1、1.5、1.5 (称为保护块规) | 4 块 |

在这套块规中，可以用不超过 4 块组合成 1～100mm 之间的任何长度，使误差不超过半丝(即 0.005mm)，块数太多，可能影响精确度。其选取的原则是：每选取一块，至少要减

少一个数位。例如:需要的尺寸是32.765mm

第一块选 1.005　余下的是 32.765－1.005＝31.76

第二块选 1.26　余下的是 31.76－1.26＝30.5

第三块选 0.5　余下的是 30.5－0.5＝30

第四块选 30

如果所需要的尺寸是29.8716mm

第一块选 1.37　余下的是 29.8716－1.37＝28.5016

第二块选 8.5　余下的是 28.5016－8.5＝20.0016

第三块选 20　余下的是 20.0016－20＝0.0016

最后余下的0.0016mm，就是误差，它不超过半丝。如果配合正九块的块规(1.001，1.002，……1.009)一并使用，就可以组合成2～100mm之间的任何长度，使误差不超过1μ(0.001mm)。

解放前，我国的块规生产是一个空白点，解放后有了迅速发展，现在我国国产的块规已在大小工厂中广泛使用着。块规是精密度很高的量具，它的生产一方面反映出工业生产上对高精密度的要求，另一方面更体现出国家高精密度的生产水平。

## 为什么用万能工具显微镜测量长度，能使误差不超过千分之一毫米？

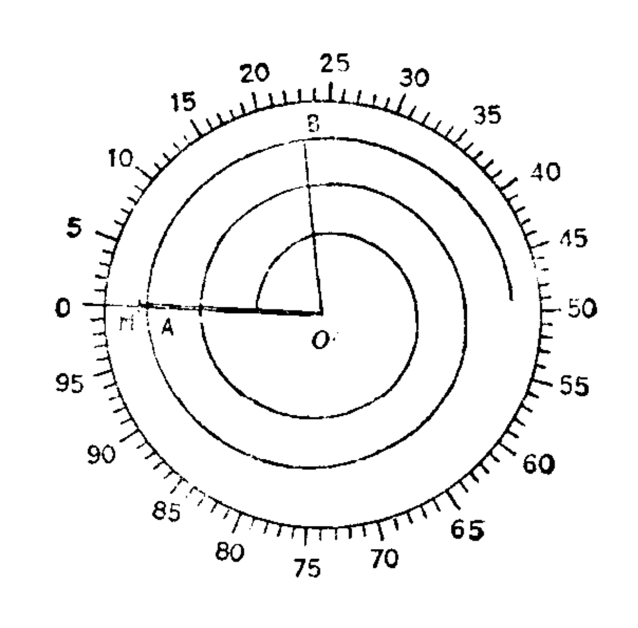
我们日常使用的直尺、三角板等量具，它们上面的最小刻度一般是一毫米，比较准确的直尺，最小刻度是$\frac{1}{2}$毫米。但是随着工业生产技术的发展，要求制造各种精密机械，往往只允许其误差在$\frac{1}{100}$毫米（称为一丝）左右，甚至在$\frac{1}{1,000}$毫米（称为 $1\mu$）以下。

平时我们认为一根头发丝已很细了，但它的直径是七丝。一般标尺上的刻度线密到一根头发丝那样粗细，我们用肉眼就很难辨别清楚了，如果要把头发的直径再分成七十等分，那又怎么能分辨得清呢？

也许你想，用一个显微镜放大，不就可以测量了吗？事实上，这样做，一方面需要有放大一千倍的显微镜，在测量时会带来很多麻烦；另一方面把一毫米分成一千份，在技术上也是很困难的。

工人老师傅在实践中使用的万能工具显微镜，只用一个放大几十倍的显微镜，就可以测出千分之一毫米的大小，这是怎么测量的呢？

我们先取一水平线$OO'$，在上面刻出$\frac{1}{10}$毫米的刻度，而为了测量出$\frac{1}{10}$毫米以下的长度，又利用象蚊香那样盘成的螺旋线。因为螺旋线有这样一个特性，当直线$O'A$依顺时针方向以等角速度旋转时，那么直线与螺旋线的交点$A$，离开$O'$点的距离也均匀地增加。万能工具显微镜中就画着这种螺旋线，螺旋线上的点沿螺旋线每转一周，它与中心的距离也均匀地增加$\frac{1}{10}$毫米。




我们再把360°的圆周均匀地分成一百格，那末，直线$O'A$每转过一格，它的长度就增加$\frac{1}{1,000}$毫米，将圆周分为一百等分的刻度，是很容易刻出的，因此所测量的长度要精确到$\frac{1}{1,000}$毫米也就不困难了。

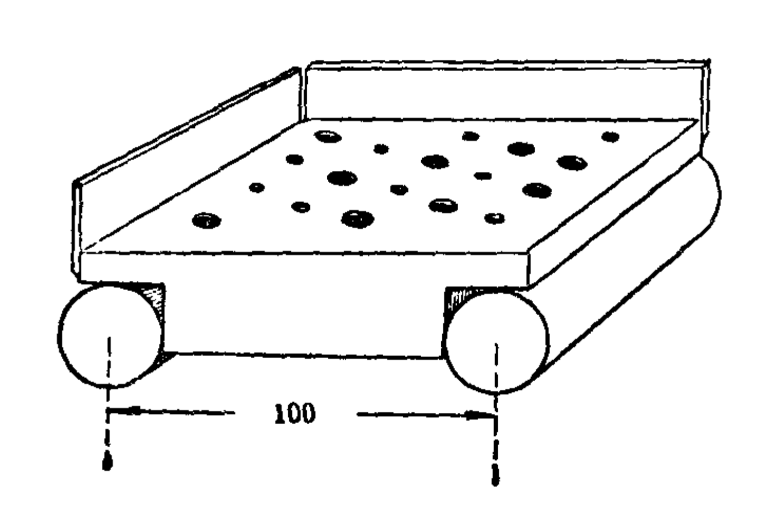
在实际测量中，被测量物体一般是不动的。如图所示，若双线标出的$O'M$是被测量物体，先利用显微镜（放大倍数不十分高）读出精确到$\frac{1}{10}$毫米的长度，即$O'A$的长，为了测出小于$\frac{1}{10}$毫米的$AM$的长度，我们转动螺旋线。例如：原在第23格位置的$O'B$在转到水平线时，恰与工件长度$O'M$相

符，那末 $O'M$ 的长度就是原来 $O'A$ 的长度再加上0.023毫米。于是，用一只放大几十倍的显微镜，再加上一些附属的零件，就不难测量到$\frac{1}{1,000}$毫米，甚至更精确的度量了。

把直线上的长，化成圆周上相应的角度是提高测量准确度常用的方法。螺旋测微器也是用这个办法，不过它是利用空间螺旋线，把直线长度化为手柄所转过的角度罢了。

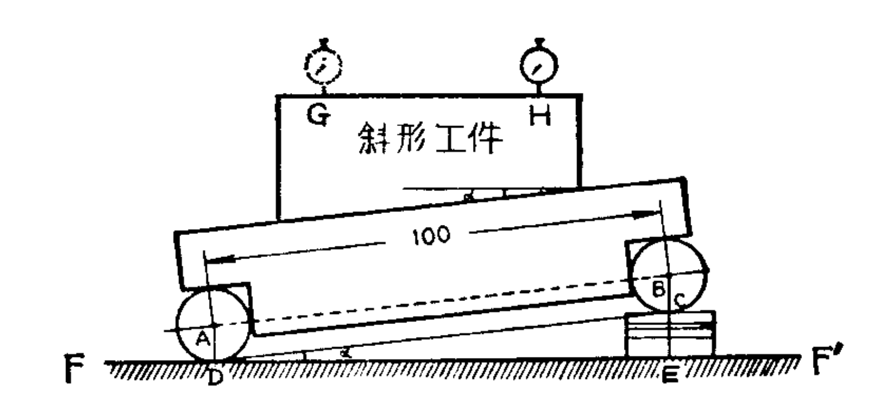
## 怎样用正弦规测量角度？

正弦规（或称正弦仪、正弦棒）是在精密测量圆锥的锥度，或斜形工件的斜度时常用的仪器。它是由高度精密的一个平面（平面上有若干孔，作为固定测件用）和两个直径相等的圆柱组成，两圆柱中心相距100毫米（也有中心距为200毫米的），两侧还有两块挡板（如左图）。测量时，往往与块规一起使用。




如果要测量一块斜形工件的斜角 $\alpha$，该怎样测量呢？首先将正弦规放在平台 $FF'$ 上（平台 $FF'$ 作为基准面，测量用的千分表座也放在基准面上），被测工件放在正弦规平面

上，在它的一个圆柱下面垫上块规（另一圆柱仍放在平台 $FF'$ 上），用千分表测工件的一面 $GH$，先在 $G$ 处测得一读数，然后移动千分表到 $H$；如果在 $G$ 点和 $H$ 点的读数不同，则必须调整块规的高度，直到千分表从 $G$ 移到 $H$ 时读数不变为止，再计算出所垫块规的总高度。




假定我们已经调整好块规的总高度为 $CE=14.205$ 毫米，则斜形工件的斜角 $\alpha$，可以从直角 $\triangle CDE$ 中求出

$$\sin\angle CDE=\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{AB}=\frac{14.205}{100}=0.14205。$$

查正弦表，得 0.14205 的角度 $\alpha=\angle CDE=8°10'$，这就是所测斜形工件的斜角。

如果要检验一工件斜角的误差有多大，也可利用正弦规。假定需要加工的斜形工件，它的斜角规定是 $8°10'$。现在要检验这一工件的斜角是否符合规定，应该怎样检验呢？

1．首先计算出斜角为 $8°10'$ 的工件，在正弦规下面应垫块规的总高度。在直角 $\triangle CDE$ 中，　$\alpha=\angle CDE=8°10'$，$CD=AB=100$，$\sin 8°10'=0.14205$。

则块规的高度　$CE = CD \sin \angle CDE$

$= 100 \times \sin 8°10'$

$= 100 \times 0.14205$

$= 14.205$ 毫米。

2. 以所求得的块规高度 14.205 毫米调整好正弦规，将被测工件放在正弦规上。

3. 用千分表测量 $G$ 和 $H$ 两点，$GH$ 的距离称测量长度，如果千分表在 $G$ 点和 $H$ 点的读数相同，说明工件斜角没有误差。如果读数不同，则工件斜角有误差，记读数差为 $\Delta l$。

4. 用 $\Delta\alpha$ 表示斜角的误差，则斜角误差的正弦

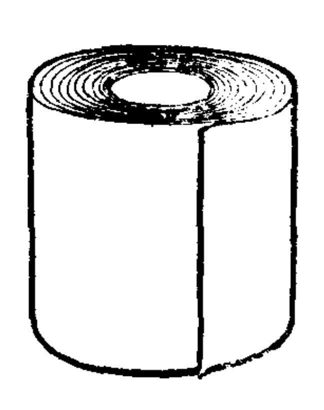
$$\sin \Delta\alpha = \frac{\Delta l}{GH},$$

若测得 $G$ 点比 $H$ 点高 0.04 毫米，即读数差 $\Delta l = 0.04$ 毫米，测量长度 $GH = 40$ 毫米，

$$\sin \Delta\alpha = \frac{0.04}{40} = 0.001。$$

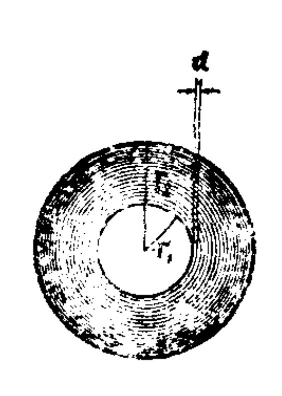
查正弦表得 $\Delta\alpha = 4'$，这说明斜形工件的斜角比规定的大了 $4'$。

# 怎样计算卷成圆筒形物体的长度?



工厂里，比较薄的产品往往是卷成圆筒形。例如：纸、布、薄铁皮等都卷成圆筒。有时候要计算它们的总长度，但又不可能把它摊开一尺一尺地去量，你看该怎么办呢?

由于这些东西是一圈圈紧卷着的，通常为了计算它的总长度 ($l$)，可以把它的横截面近似地看成是许多同心圆。




因为它的半径是逐渐增大的，每转一圈半径就增大 $d$ (即物体的厚度)，所以总长 $l$ 就是平均圆周长与圈数的乘积。而平均圆周长为平均半径乘以 $2\pi$；圈数为内外半径之差除以物体的厚度。

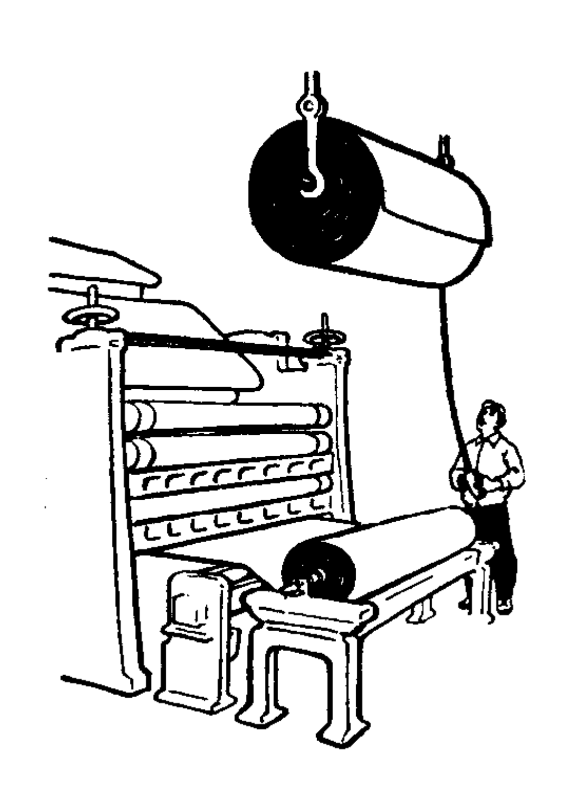
设：圆筒的内外半径为 $r_1$ 和 $r_2$，厚度为 $d$，

那么总长 $l$ 的近似值为：

$$l=2\pi\cdot\frac{r_1+r_2}{2}\cdot\frac{r_2-r_1}{d}$$

$$\therefore \quad l=\frac{\pi(r_2{}^2-r_1{}^2)}{d}。$$

这是一个近似公式，虽可以应用，但计算起来还是不够简便。工人同志从生产实践中创造了一种更简便正确的方法，这就是利用长度与重量的关系来解决的。例如：要求某一卷物体的长度，可先剪下一段，称称看有多重，量量看有多长，用这长度去除以重量，就得到单位长度的重量。然后称出这一卷物体的净重，再除以单位长度的重量，就得到总长 $l$ 了。



## 怎样做一把简单而实用的测距标尺？

简单而实用的测距办法，在三大革命运动中也是很有用的。常用的简单测距方法，有步数估计法和帽檐测距法等，它们都各有优缺点。

如果你需要比较准确地测量近距离，而手头又没有皮尺时，怎么办呢？你可以用较厚的纸条自己动手做一把简单的测距标尺。这种测距标尺用来测量农村小河的宽度，或者是拍摄照片时用来校正距离等，效果都很好。

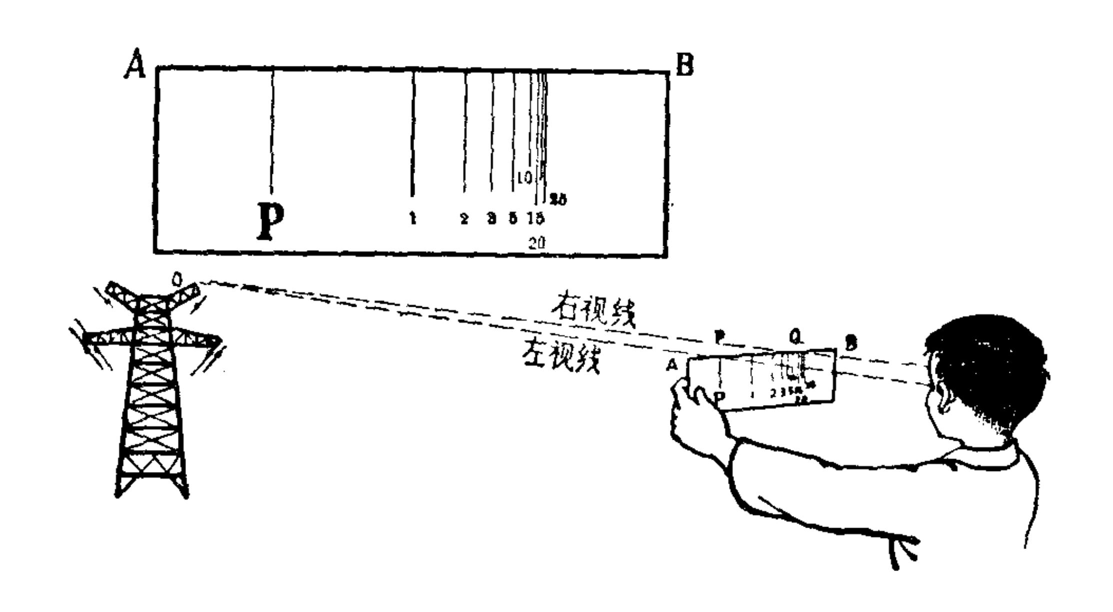
这个纸条测距标尺怎么用法呢？

假设下图中的$O$表示要测量的物体的位置，$L$是我们的左眼，$R$是右眼，$AB$是纸条测距标尺的两端，$AB$与$LR$的垂直距离就是我们手臂的长度，$P$点就是纸条测距标尺上的一个定点。使用时，拿着纸条的两端，向前伸直，使纸条与眼睛平行且一般高。然后闭上右眼，用左眼$L$看目的物$O$，移动纸条，使$O$、$P$、$L$三点在一直线上；再闭上左眼，用右眼$R$去看目的物$O$（这时候要注意，头和手都不要动，否则测出的结果不准确），并记住视线$RO$与纸条上$AB$的交点$Q$，这时$Q$点的位置就表示出目的物的远近了。

为什么在这么一张纸条上画出几根线，就能用来测量距离呢？

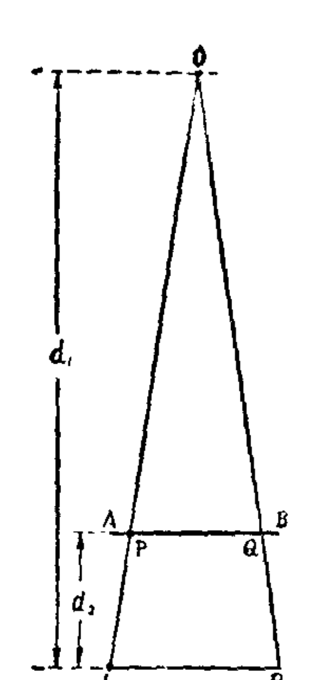
你知道了相似三角形的性质，就很容易理解了。

设：目的物跟测量者之间的距离是$d_1$，测量者的手臂长度为$d_2$。



因为 $\triangle OPQ$ 与 $\triangle OLR$ 是相似三角形，所以得到下面的比例式：

$$\frac{d_1}{d_1-d_2}=\frac{LR}{PQ}。$$




改写一下，得下式：

$$d_1=d_2\times\frac{LR}{LR-PQ}。$$

因为测量者两眼之间的距离 $LR$ 和手臂的长度 $d_2$ 是常数，所以目的物的远近决定于 $PQ$ 数值的大小。也就是说，从 $Q$ 点的位置就能知道目的物的距离了。

由于各人的手臂长度、两眼之间的宽度不完全相同，因此这种测距标尺的专用性较强，往往别人用很准确，自己用就不准确了。为了求得准确起见，可以根据自己的情况自制一个。

怎么做法呢？

假如你两眼的宽度（两眼中心之间的距离）$LR$ 是 7 厘米，手臂长为 55 厘米，根据上面的比例式可得：

$$PQ=\frac{d_1-55}{d_1}\times 7。$$

在制作时，把需要测量的距离 1 米、2 米、3 米、5 米、

10 米、15 米、20 米等代入上列公式，算出与这些数据相对应的 $PQ$ 值，如：

| $d_1$ (厘米) | 100 | 200 | 300 | 500 | 1,000 | 1,500 | 2,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $PQ$ (厘米) | 3.15 | 5.08 | 5.72 | 6.23 | 6.62 | 6.74 | 6.81 |

然后用一张较厚的纸条，在左端画一直线作为固定点 $P$ 的位置，再在距 $P$ 线 3.15，5.08，5.72……厘米处各画一线表示 $Q$ 点的各个相应位置。

为了清晰起见，这些线条也可以用两种颜色或长短不等的线来表示，以便观察。

## 不用测量仪器，你能目测远处物体的距离吗？

测量距离的方法很多，可用仪器测量，也可用目测。目测，就是根据眼睛的视觉来测量出物体的距离。一般说来，仪器测量比较精确，如果手头没有测量仪器，那么，也可用目测来测量距离。

在我们中国人民解放军部队中，虽然有着各式各样现代化的观测器，但是用马列主义、毛泽东思想武装的解放军

战士，怀着热爱毛主席的一颗红心，为了中国革命与世界革命，发扬一不怕苦、二不怕死的革命精神，努力锻炼目测，他们充分发挥了人的因素，不光依赖测量器材，人人都练出了一手过硬的目测本领。有些同志能够在几秒钟内，非常正确地目测出几千米以内的距离，真象是一部活的测距机。

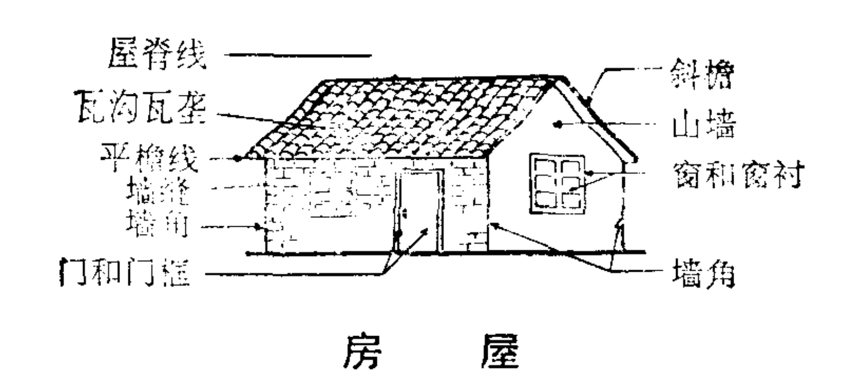
眼睛是怎样测量出物体的距离来的呢？

这是因为人的视力是相对稳定的。随着观察物体的远近，视觉也不断地起着变化。距离越近，观察物越清楚；距离越远，观察物越模糊。

由于物体的外形都有一定的规律。例如：房屋的外貌和形状都大致相同，都有瓦、墙、窗户和门，树木都是有树干、树枝、树叶；动物总都是有头部、四肢和身躯。随着距离不同，眼睛观察物体的视觉征象也不同，经常注意各种物体的视觉征象，掌握住它们在不同距离的清晰程度。这样就可以根据所观察到的物体的形态，目测出它们的距离来。

毛主席教导我们：**“要认真总结经验”**，人们通过实践总结出一些经验，可作目测时的参考。

下面是房屋、行人在不同距离的主要特征（以正常眼睛为准），根据我们所看到的形态，可以目测出的距离。




## 房　　屋

300 米　　墙可见缝，瓦能数沟。

500 米　　门见开关，窗见格，瓦沟条条数不清。

700 米　　瓦面丝丝窗见衬，大衬分明，小衬消。

1000 米　　轮廓清楚瓦面乱，门成直角，窗衬消。

1300 米　　门窗都不成直角，瓦平、墙角中稍昏[1]。

1500 米　　瓦面平光窗成洞，中间墙角线模糊。

1700 米　　伸出斜檐能看进[2]，下部模糊，上部清。

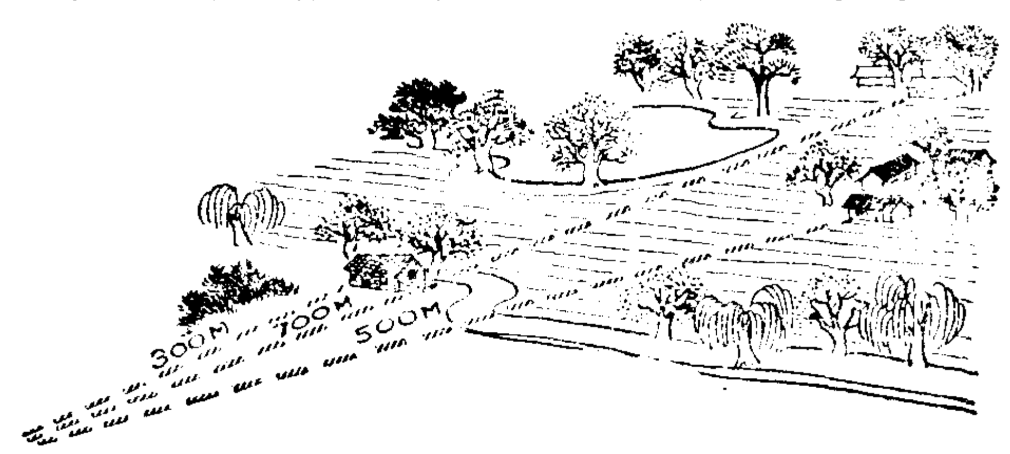
2000 米　　窗成黑影，门成洞，平檐模糊线不清。

2300 米　　斜线模糊墙变矮，屋脊线条可分清。

2500 米　　门成黑影，窗难见，村无层次线全糊[3]。

2700 米　　房屋越远墙越矮，山墙成了月牙形。

3000 米　　檐乱墙弧门难见，半截房墙土里边[4]。






## 行　人

| | |
|---|---|
| 300 米 | 面色可见，五官不清。 |
| 400 米 | 头肩分，面不清。 |
| 500 米 | 头肩不清，男女分得清。 |
| 600 米 | 手模糊，肘清楚，动作分明。 |
| 700 米 | 迈腿分左右，手肘看不清。 |
| 800 米 | 迈腿有间隙，左右分不清。 |
| 900 米 | 上体扭动大，两腿无间隙。 |
| 1000 米 | 人体上下一般粗，扭动量减小。 |
| 1300 米 | 行走似蠕动，负重可分清。 |
| 1500 米 | 行走蠕动小，负重分不清。 |
| 1700 米 | 人象黑长影，运动象木桩。 |
| 1800 米 | 人形不明显，运动成圆点。 |
| 2000 米 | 人成黑点象草丛，停止运动看不清。 |
| 2500 米 | 骑车骑马都能见，行人统统看不清。 |

用这个方法目测远距离，由于要受气候、光线、角度的影响，眼睛的视力也受到一定的限制，因此应根据下面的情

---

① 中间墙角不很清楚。

② 伸出的瓦檐能看见里面。

③ 村庄连成一片，看不出层次，轮廓线条全部模糊。

④ 看房子好象有一半墙看不到了。

况来修正这些影响的误差。

晴天：面对阳光，眼睛受到光线的刺激，视力减弱，所以物体的实际距离，应从所测得的距离中减去6～10%。如果背向阳光测距离，眼睛不受光线刺激，物体被阳光照射后清晰明亮；物体的实际距离，应该是所测得的距离再加上所测得之数的6～10%。

阴天：有雾时，能见度减弱，物体模糊，物体的实际距离，应从所测的距离中减去12%左右。

雨后：空气新鲜，物体颜色鲜明，应增加所测距离的15%左右。

如果物体在水边或江河湖的岸边，由于水面的反光，应增加所测距离的15%左右。

毛主席教导我们："**世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。**"因为各人的视力不同，物体地形也较复杂，各地区、各季节都不同，天气也经常变化，因此只有经过艰苦练习，反复体会，摸出自己的视觉规律，并结合实际情况，就可以目测出任何一个地方物体的距离来。

## 为什么利用人影可以测量大树的高度?

当你在阳光下走路的时候，你会看到自己的影子，这影子有时比人长，有时比人短。可是，你有没有想到，在阳光

下，利用人影可以简便地测出大树（或建筑物）的高度呢？

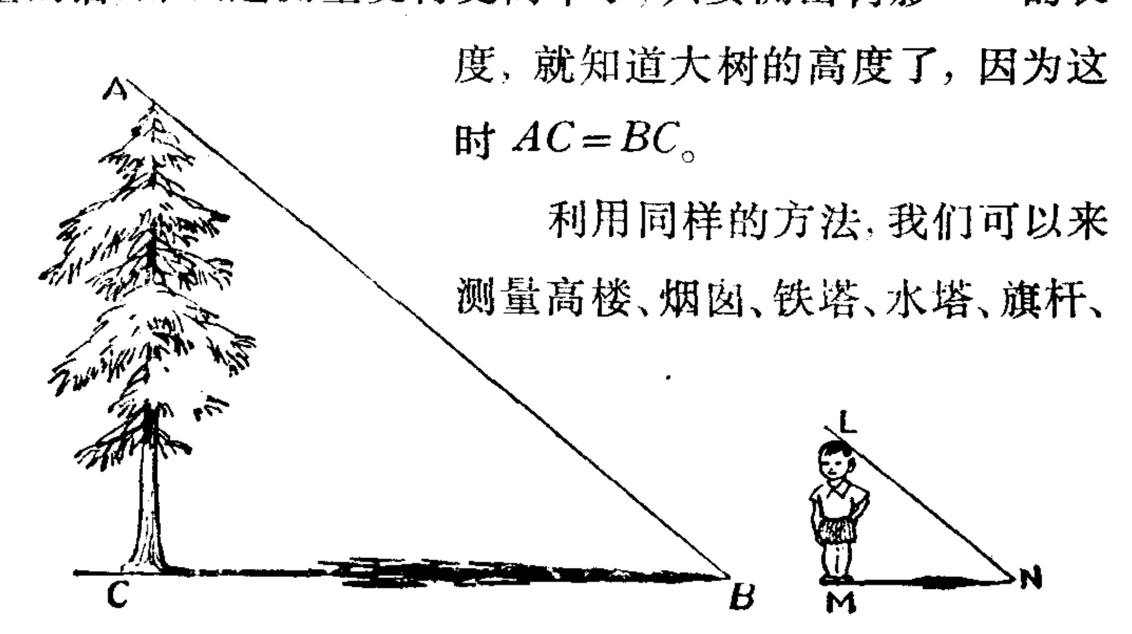
如果在地面要测量大树的高度，我们利用太阳光下的人影，就很容易办到。这只要先测出大树底中心 $C$ 到大树影子端点 $B$ 的长度，然后再测量一下你自己的人影长 $MN$，你自己的身长 $LM$，就可以算出大树的高度了。因为你自己的身长是早已知道的，那么大树的高度 $AC$ 可按照下式来算出：

$$AC = BC \times \frac{LM}{MN}$$

为什么这么简单呢？因为太阳光是平行照射下来的，我们可以把三角形 $ABC$ 与三角形 $LNM$ 看成是两个相似三角形、相似三角形的对应边应该成比例。

假使当你自己的身高正好与人影长度相等的时候去测量的话，那么这测量变得更简单了，只要测出树影 $BC$ 的长度，就知道大树的高度了，因为这时 $AC = BC$。

利用同样的方法，我们可以来测量高楼、烟囱、铁塔、水塔、旗杆、



电线杆等的高度。

如果利用三角的知识，我们还能有多种测量高度的方法，不过都要用测角器来测量仰角。利用人影测量物高的方法就比较简单。

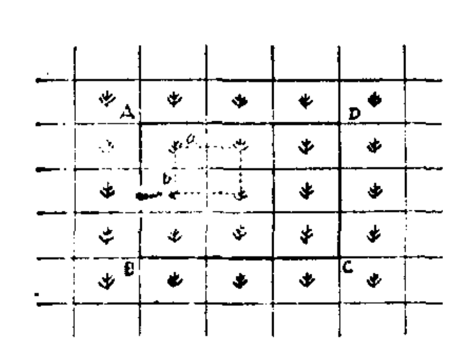
## 怎样估计田里水稻的产量？

在毛主席“**备战、备荒、为人民**”的伟大战略方针指引下，广大贫下中农狠抓革命，猛促生产，粮食的产量年年提高，在很多地区，粮食全年亩产量超过了1,500斤，大家尝到了革命化的科学种田的甜头，都说：“人听毛主席的话，庄稼就听人的话，革命化的科学种田真正好！”

贫下中农为了做到“胸中有‘数’”，在收割前需要对农作物进行估产（或叫预测）。预测以后，可以对新品种的产量、新措施的效果进行考察，以便不断总结经验，使得高产再高产，同时预测也有利于制定收割时安排劳动力的计划。

一块已经结穗的水稻田，你能估计出它究竟能收多少谷子吗？这问题好象很难办，因为田里有那么多株水稻，每株水稻又结很多穗，而每一穗上又有许多谷子，那怎么能数得清呢？如果你利用数学上“抽样”（就是选取有代表性的局部来估计整体）的方法，就可以帮助你估计了。

现在我们先来看如何预测一块水稻田的单位面积产量(通常单位面积产量是指每平方寸的土地产多少克,或者每亩产多少斤),我们在要预测的田块中任选如下图所示的一小块 $ABCD$, 其中有 9 株水稻, 如果每二株横里相距 $a$ 寸, 直里相距 $b$ 寸, 那么这一小块 $ABCD$ 的面积应当等于 $9ab$ 平方寸。想一想,为什么?




现在我们再从这 9 株水稻中各任取一穗, 对这 9 穗测出每穗的平均粒数 $k$。每穗的平均粒数 $k$, 就是 9 穗的总粒数(空粒不算在内)除以 9。假设这 9 株水稻上共结 $n$ 穗, 那么可以近似地认为这 9 株水稻共生长 $nk$ 颗谷子。而这品种每千粒重 $p$ 克, 根据以前的生产资料是已知的, 这样小块 $ABCD$ (就是这 9 株水稻)的产量应当是$\frac{nkp}{1,000}$克,于是单位面积产量 $x$ 就可以测出来了:

$$x=\frac{nkp}{1,000}(\text{克})\div 9ab(\text{平方寸})$$

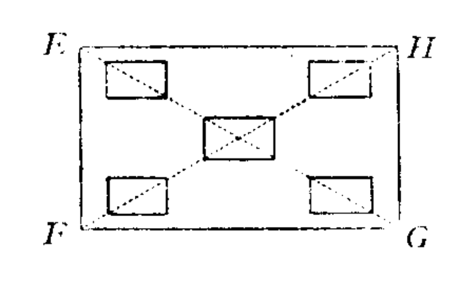
$$=\frac{1}{9,000}\cdot\frac{nkp(\text{克})}{ab(\text{平方寸})},$$

因为 1 斤 = 500 克, 1 亩 = 600,000 平方寸, 所以可按下式算出其亩产量:

$$x=\frac{1}{9,000}\cdot\frac{nkp\cdot\frac{1}{500}(\text{斤})}{ab\cdot\frac{1}{600,000}(\text{亩})}=\frac{2}{15}\cdot\frac{nkp(\text{斤})}{ab(\text{亩})},$$

于是整块水稻田的产量 $w$，可近似地认为是这整块水稻田的面积 $s$ 与所求出的单位面积产量 $x$ 的乘积，即 $w=x\cdot s$。

因为测算单位面积产量时只从较小的田块 $ABCD$ 来考虑，也就是说实质上我们是用它的单位面积产量来近似地作为整块水稻田的单位面积产量，所以这样测算可能误差较大。为了比较准确地作出估计，我们可以选择具有代表性的田块 $EFGH$（如左下图），在它的中心和四角各取相当于图1中 $ABCD$ 的小块，这样按上法对每一小块测出其单位面积产量，再取其平均值，也就是说如果这5小块的单位面积产量分别为




$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，$x_5$，那么就取

$$y=\frac{1}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$$

作为整块水稻田的单位面积产量，这样误差就比较小了，此时用 $w=y\cdot s$ 来计算整块水稻田的产量就比较准确了。

## 为什么知道了芦席的长和宽，就能算出芦席围起来的容积？

在毛主席的“**备战、备荒、为人民**”的伟大战略方针指引下，广大贫下中农树立了种田为革命的思想，夺取丰收粮。贫下中农说：“多收一颗粮食，多一发打击帝、修、反的子弹。”粮食收起来以后，要保藏好粮食，也是农业生产中很重要的一环。农村里，通常是用芦席围起来盛放粮食，因为芦席的成本较低，而且席圈底下放一只匾，防潮的效果较好。我们怎样根据芦席的长和宽，计算出芦席围起来的容积有多大，从而估计出大约能盛放多少粮食呢？贫下中农通过生产实践创造了一种计算方法。这种方法既简单又较准确。

贫下中农是怎样算出来的呢？

贫下中农的计算方法很简便。设芦席的长为 $a$，宽为 $b$，立刻就可以算出芦席围起来的容积是：以 0.08 乘以芦席的面积，再乘以长边的长度，即：

$$V \approx 0.08(ab)a \approx 0.08a^2b$$

芦席围起来的容积可以近似地看成是圆柱体。通常计算圆柱的体积，是用它的底面积乘高，即：$V=\pi r^2 h$。而上面那个式子中，既没有 $\pi$，也没有圆柱的底面积的半径 $r$，为

什么利用芦席的长和宽乘以0.08就能算出圆柱的容积呢？

我们仔细看看，就知道贫下中农从实践中创造出来的这个式子，是很有道理的。

把芦席摊开来，它的长为 $a$，就相当芦席围起来时的圆柱的底的周长，即

$$a=2\pi r。\qquad (1)$$

芦席摊开时的宽为 $b$，也就等于芦席围起来时这个圆柱的高 $h$，即 $b=h$。而芦席的面积($ab$)，正好相当于这个圆柱的侧面积($2\pi rh$)，即

$$ab=2\pi rh。\qquad (2)$$

将(1)×(2)得

$$a^2b=4\pi^2r^2h。\qquad (3)$$

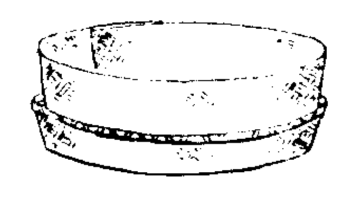
而圆柱的体积

$$V=\pi r^2h。\qquad (4)$$

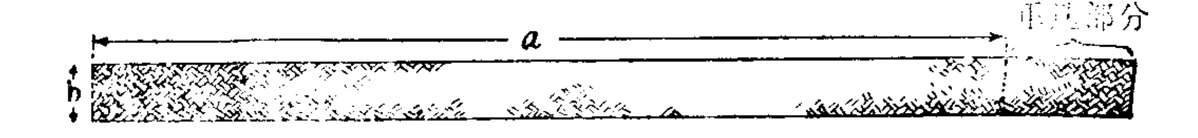
将(3)代入(4)得

$$V=\frac{a^2b}{4\pi}=\frac{8a^2b}{32\pi}。$$

因为 $32\pi$ 的近似值是100，



$$\therefore\quad V=\frac{8a^2b}{32\pi}\approx\frac{8a^2b}{100}\approx0.08a^2b。$$



利用这个式子来计算芦席围起来的容积是很方便的，而且误差也不很大。

**例如**：芦席长4丈，宽1尺3寸，围成席圈盛稻谷。假定席圈首尾接合处重迭了4尺，可盛稻谷多少斤？

根据上面的式子，可算得席圈的容积是

$$V \approx 0.08\times(40-4)^2\times1.3$$
$$\approx 134.8(立方尺)。$$

设每立方尺的稻谷约重45斤，那么可盛稻谷

$$45斤\times134.8\approx6,066斤。$$



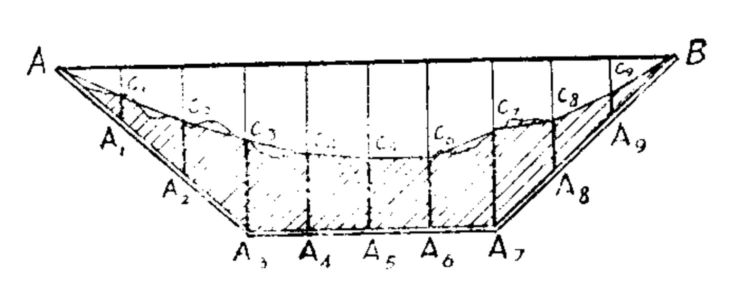

如果用几领席圈接起来盛放粮食，在计算时，只要将上列式子所得的结果再乘以芦席的圈数，就可算出芦席围起来的总容积了。

## 在疏浚河道前怎样估计工程土方？

广大贫下中农为了贯彻毛主席提出的农业"八字宪法"，大力兴修水利。在疏浚小川河道时，总需要先计算出工程土方，然后才能安排劳动力，分配任务。河床的截面是弯弯曲曲的，怎样才能简便又迅速地进行计算呢？



下图是河床某地段的横截面图，双线表示开成的新河床的底，弯曲细线代表旧河床的底。河床宽 10 米，阴影线区域表示要挖去部分的横截面。




贫下中农从实践中总结出一个迅速又准确的方法。他们将 10 米宽的河床分成 10 段，在每个分点上测得旧河床的深度，算出新旧河床底之间的距离(在图上用粗线表示)，把所有粗纵线的长度加起来，乘以 1 米，就是所需挖去部分的横截面面积，再乘上该段河床的长度，就是工程的土方了。

这儿实际上是用很多小梯形来近似地代替需要挖去部分的横截面(即阴影线部分)，而使计算简化的。假设新旧河床底与粗纵线的交点分别为 $A_1$、$A_2$、$A_3$……$A_9$；$C_1$、$C_2$……$C_9$，将 $AC_1$、$C_1C_2$、$C_2C_3$……$C_9B$ 分别用直线连结起来，那么除 $AA_1C_1$ 和 $C_9A_9B$ 为三角形外，其余 $C_1A_1A_2C_2$、$C_2A_2A_3C_3$……

$C_8A_8A_9C_9$ 均为梯形。每个梯形和首尾两个三角形的高都为 1 米，它们的面积可用下列各式表达：

$$\triangle AA_1C_1=\frac{1}{2}C_1A_1\times 1\text{ 米}$$

$$\text{梯形}\quad C_1A_1A_2C_2=\frac{1}{2}(C_1A_1+C_2A_2)\times 1\text{ 米}$$

……

$$\triangle C_9A_9B=\frac{1}{2}C_9A_9\times 1\text{ 米}$$

将这些式子加起来，左边是

$$\triangle AA_1C_1+\text{梯形 }C_1A_1A_2C_2+\cdots\cdots+\triangle C_9A_9B$$

即折线 $AC_1C_2\cdots\cdots C_9B$ 与 $AA_3A_7B$ 所围成的面积。右边是

$$\left[\frac{1}{2}C_1A_1+\frac{1}{2}(C_1A_1+C_2A_2)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}C_9A_9\right]\times 1\text{ 米}$$

$$=(C_1A_1+\cdots\cdots+C_9A_9)\times 1\text{ 米。}$$

这也就是我们用以近似地代替阴影线部分的面积。

这里，我们用折线 $AC_1C_2\cdots C_9B$ 与 $AA_3A_7B$ 所围成的面积，近似地代替了阴影线部分的面积。当 $AB$ 中分点取得较密时，这个替代是相当准确的，因此用这个方法所计算得的工程土方也是相当准确的。

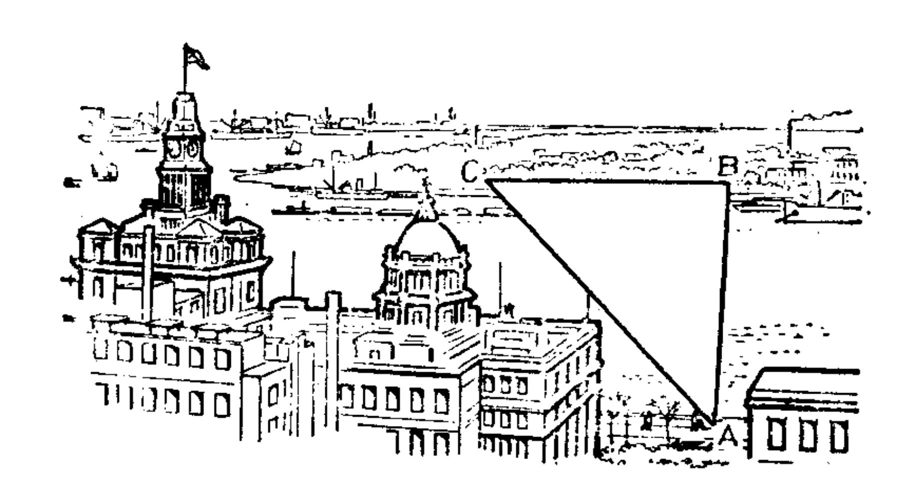
# 黄浦江的宽度怎样算出来的?

黄浦江、苏州河，是上海水路运输的重要江河，也是上海人民的饮水水源。可是长期来河水变黑发臭。这主要是城市的生产和生活污水没有经过处理，大量流入江河造成的，也是蒋匪帮黑暗反动统治的罪证之一。解放后，在毛主席的英明领导下，上海人民下决心"**迅速地荡涤反动政府留下来的污泥浊水**"，尤其是通过无产阶级文化大革命，彻底打倒了叛徒、内奸、工贼刘少奇及其在上海的爪牙，上海人民提出了改造苏州河的口号。一方面加强各工厂工业污水的处理，另一方面把这些工业污水连同生活污水集中起来分成几个系统，通过管道输送到郊区去作肥料。为了使污水能穿过黄浦江输送到郊区去，就要在江底敷设一条过江管，这就要计算黄浦江有多宽，如何比较精确算出黄浦江的宽度呢?

假设要计算从 $A$ 点到 $B$ 点的距离，怎么算呢?

测量计算的同志在 $B$ 岸可以再选一点 $C$，$A$、$B$、$C$ 三点组成一个三角形，设 $B$、$C$ 两点都在浦东岸边，$BC$ 的长度可以直接测量出来，如测量得 $BC=521.12$ 米，$\angle A$ 和 $\angle C$ 也可以用精密的经纬仪比较精确的测出来，如测得

$$\angle A=45°16'42'',\qquad \angle C=46°43'12''$$




在三角形 $ABC$ 中，$\angle A$、$\angle C$、$BC$ 都测量出来，利用正弦定理就能计算出 $AB$ 的长度。

由正弦定理 $$\frac{\sin\angle C}{AB}=\frac{\sin\angle A}{BC}$$

故

$$AB=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle A}\times BC$$

$$=\frac{\sin 46°43'12''}{\sin 45°16'42''}\times 521.12$$

$$\approx\frac{0.72801211}{0.71053343}\times 521.12$$

$$\approx 1.0246\times 521.12$$

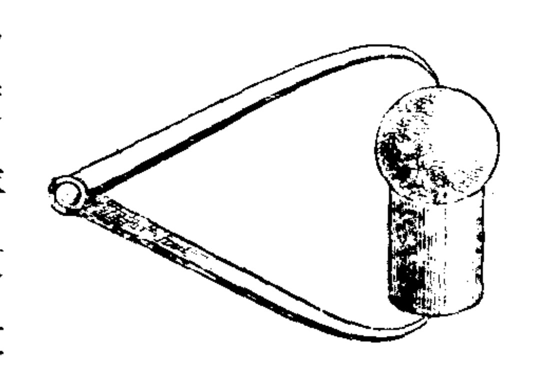
$$\approx 533.94(\text{米})$$

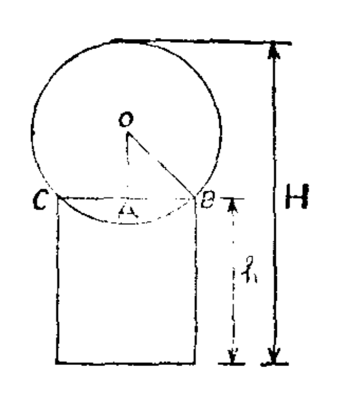
这样测量计算所得到的黄浦江的宽度是比较精确的，其误差一般在 3 厘米之内。

# 怎样测量很细的管子的内径?

在工厂测量工件，有各种各样的量具，比如游标卡尺、卡钳、塞规等等。但是有时手头量具不全，或由于某种工艺要求，对工件进行加工后无法用量具直接测量，这就要进行间接测量，比如要测量一个很细的管子的内径，通常用的内卡钳太大，放不进去，又没有合适的塞规，那么怎样解决这个问题呢？你只要走到工厂中去，向工人老师傅请教一下，老师傅就会告诉你一种简便的间接测量办法：

拿一个已知直径的钢球放在管子的口上，取管子的一段固定长度 $h$，那么钢球放上以后，钢球与这段管子的总的高度可以用量具量出，设为 $H$。过球心及管子直径的两个端点 $B$、$C$ 做截面，如右下图。过 $O$ 点向 $BC$ 做垂线 $OA$，很显然 $AB$ 就是管子的半径。由勾股定理可以知道：$AB=\sqrt{OB^2-OA^2}$，这里 $OB$ 是已知球的半径，若记半径为 $r$，那么 $OA=H-h-r$，由于这些都是已知数，所以 $AB$ 就不难算出了。







## 为什么用绳一绕，就能算出圆件的直径？

在我们伟大祖国的大地上，到处都有宝，其中森林是我国一项很重要的财富。无论是国防建设、经济建设等都少不了木材。采伐工人为了做到胸中有“数”，计划伐木，要知道这棵树有多大？采伐工人在实践中有一个很简单的办法，就是用绳子绕一圈，立即能把直径求出来。因为绳子绕一圈所得的长度，就是圆周的长度，把这个长度除以 3（如果要比较准确地计算，应该除以 $\pi$），就得到直径的长度了。

这是因为圆的周长等于 $\pi$ 乘以圆的直径。

即：

$$C=\pi\cdot d。$$

其中 $\pi$ 代表圆周率。$\pi$（读做 pai）是希腊字母。

什么叫圆周率呢？就是圆的周长与圆的直径的比值，叫做圆周率。

圆周率$\pi$是一个常数，因为圆的周长缩小或扩大几倍，圆的直径也一定缩小或增加同样的倍数。因此圆的周长与直径的比总是不变的。

在我们日常生活、生产实践中，常常要遇到圆的东西，因此也常常要用到圆周率。为了要求得圆周率$\pi$的数值，世界各民族都花了不少努力。伟大领袖毛主席指出：“**中国是世界文明发达最早的国家之一**”。在1,500多年前，我国古代的祖冲之，就已经精确地推算出$\pi$的值在3.1415926和3.1415927之间，并且提出了$\pi$的约率为$\frac{22}{7}$，密率为$\frac{355}{113}$。而西欧直到很晚才推算出这密率的数值，这是我们民族值得骄傲和自豪的。

真正的$\pi$的数值要用无穷小数才能表示，从下图中可以看出它前面的若干位数值；$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$都是它的近似值。$\frac{22}{7}=3.142857\cdots\cdots$与$\pi$的值比较一下，它们只是在小数点后的前两位相同，可见这个近似值是很约略的，祖冲之称它为约率。而$\frac{355}{113}=3.1415929\cdots\cdots$与$\pi$的值在小数点后的前六位都相同，比较精密，所以称它为密率。

由于社会在前进，科学不断发展，人类对于客观事物的

$$\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{355}{113}=3.\dot{1}415929203539823\ldots$$

$$\pi=3.14159265358979323\ldots$$

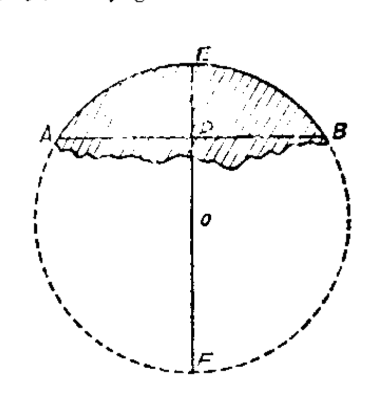
认识也不断的深入和发展，直接或间接测量圆件的直径的办法就越来越多了。譬如在工厂里用游标卡尺、角卡等量具来测量圆的直径。地球直径可以通过高空拍照等方法间接求得。

## 怎样测出残缺不全的圆形零件的直径？

有一次，一位工人师傅拿到一个圆形零件的残块(如图阴影线所示弓形)，他想重新做一个完整的。但不知道它的直径是多少，他就去问车间工艺室的一个所谓“技术权威”，不料这个“权威”冷笑一声，把一本厚厚的洋文书，“啪”地一声丢在桌子上，傲慢地说：“这里面都有。”当时，这位工人师

傅只读过初中一年级，哪里认识这些洋文、公式？资产阶级“权威”就是这样故意刁难我们工人。我们工人有志气，无比热爱伟大领袖毛主席，这位工人师傅为工人阶级争气，为革命努力学习，终于把这个圆形零件做出来了！

我们知道，当圆形零件的残存部分不到一半时，不能用直接测量的办法来测出直径。那么，就必须从残存部分测得一些线段的长度，再由此推算出直径的尺寸。




我们假设这个弓形所在圆为圆 $O$，连结弓形圆弧上的两点 $A$ 和 $B$，通过 $AB$ 的中点 $D$，作 $AB$ 的垂线，与圆 $O$ 交于 $E$、$F$。根据圆的对称性，$EF$ 必通过圆心 $O$，所以 $EF$ 是直径。

$AB$、$EF$ 都是圆 $O$ 的弦，它们相交于 $D$ 点，根据圆的性质，则

$$DE \cdot DF = AD \cdot DB, \tag{1}$$

又

$$DF = EF - DE, \tag{2}$$

$$AD = DB = \frac{1}{2}AB, \tag{3}$$

将(2)、(3)代入(1)，则

$$DE(EF - DE) = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$EF - DE = \frac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{DE}$$

$$\therefore \qquad EF=\frac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{DE}+DE_{\circ}$$

$AB$ 和 $DE$ 的长度，从残存的弓形零件上可以直接测得，因此，不必画出圆 $O$，从上面这个式子就可以直接计算出直径 $EF$ 的尺寸了。

在党的培养下，我们这位工人师傅进一步将理论知识与生产实践结合起来，搞了许多技术革新，创造了那些跟在洋人后面爬行的“权威”想都不敢想的新式车床，大大提高了加工的精密度。

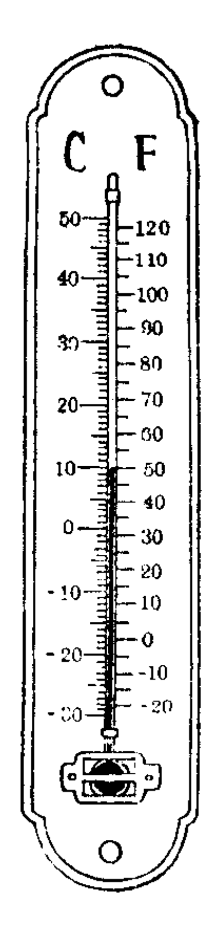
无数事实雄辩地证明了伟大领袖毛主席指示的：“**卑贱者最聪明！高贵者最愚蠢**”这条真理。

## 什么是图算法？

我们看看温度计，知道今天的温度是摄氏多少度，或者是华氏几度？因为温度计上已标出它们的度数，不用计算，一看就知道了。比如摄氏 10 度就相当于华氏 50 度。其实，这就是一种最简单的图算法。什么叫做图算法呢？就是利用特制的线条进行计算的一种方法。我们知道摄氏温标与华氏温标之间的关系是：

$$F=\frac{9}{5}C+32_{\circ}$$

利用这个公式，根据$C$的已知值（例如10），虽然可以算出$F$的值（例如50），但是如果用上面的特制线条图算法，就可以避免公式计算，应用非常方便。这是图算法的一个显著优点。

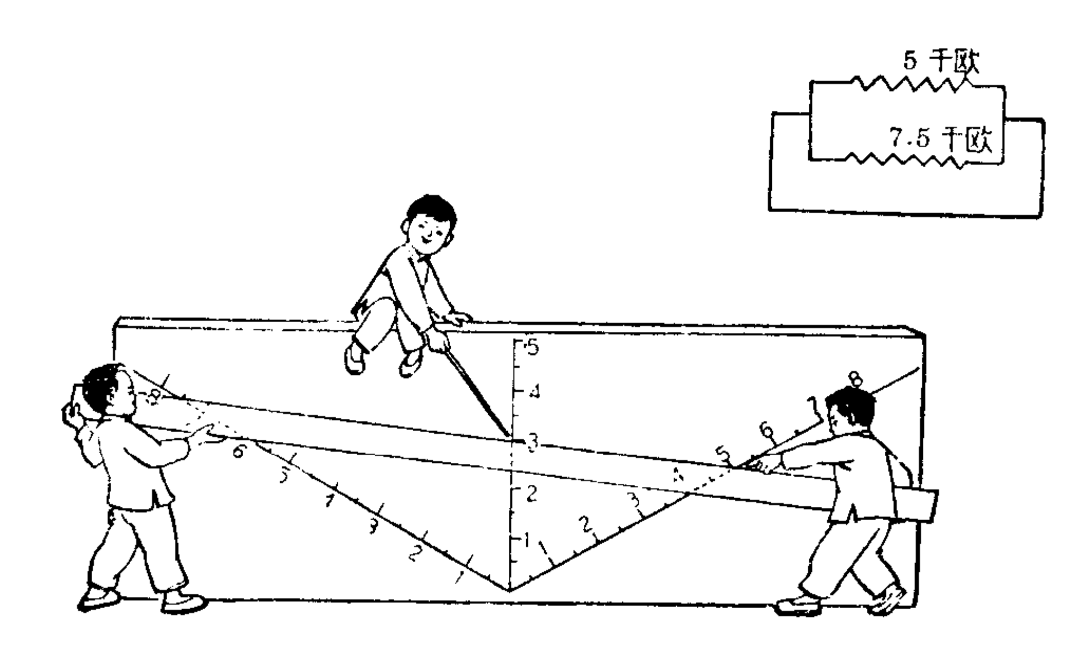



再来看一个例子。设有两只电阻并联起来，其中一只电阻为5千欧，另一只电阻为7.5千欧，问并联以后的阻值是多少？

对于这个问题，一般是利用公式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},$$

来进行计算。但我们也可以设计出一种图算法来，作一只120°的角，再画一根角平分线，在角的两边及角平分线上用同样的单位长进行刻度，这张简单的图就制好了。使用



的时候，我们只要用一把直尺，把图上刻着 7.5 与 5 的两点联成一直线，这条直线与角平分线的交点的刻度是 3，因此我们就知道

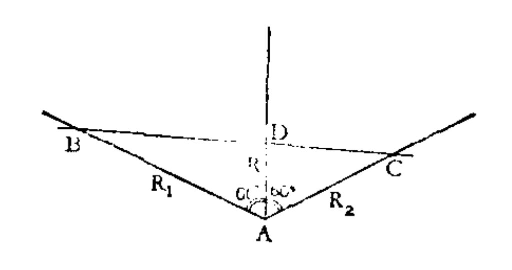
$$R=3\text{ 千欧。}$$

这个图算法还可以用于光学中凸透镜公式

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}\text{。}$$

从图上我们可以看到，若 $u=7.5$ 厘米，$f=3$ 厘米，则象距 $v=5$ 厘米。你看，用这种方法，避免了繁复的计算，答数仍很精确，岂不是很好吗？

为什么能够这样容易而精确地根据图来求出 $R$、$v$ 的值呢？这道理也很简单，现在我们拿上面电阻的例子来看（凸透镜公式的例子也是一样的）：




因为大 $\triangle ABC$ 的面积等于小 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 面积的和，由三角形面积公式得

$$\frac{1}{2}R_1R_2\sin 120^\circ=\frac{1}{2}R_1R\sin 60^\circ+\frac{1}{2}RR_2\sin 60^\circ,$$

$$\because\quad \sin 120^\circ=\sin 60^\circ,$$

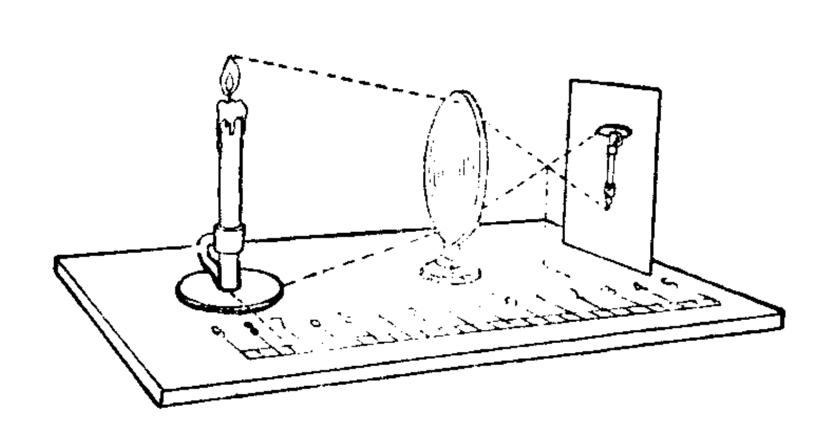
$$\therefore\quad R_1R_2=R_1R+R_2R,$$

即
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\text{。}$$

所以我们知道，当直尺在任何位置时，它在角的两边和

角平分线上所截得的三个线段的长度 $R_1$、$R_2$、$R$，的确满足上面的关系式。

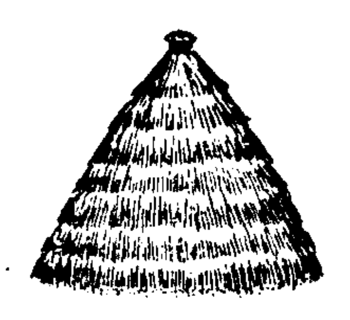
图算法有许多显著的优点. 它的运用极为简便，不需要繁复的计算；得出的数据虽然是近似值. 但在大多数情况下是能够应用的。尤其对于经常需要用同一类公式去计算的人（如测量制图人员，化工仪表操作人员），更能体会到它的优越性。图算法的设计是一种专门的学问，它是数学的一个分支。由于它紧密联系生产，已广泛地用于工程计算中。



## 为什么拟棱台公式能计算多种形体的体积？

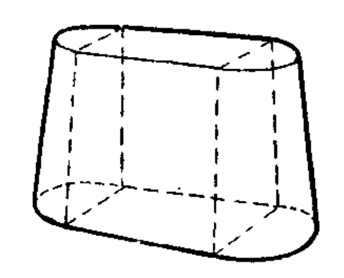
在生产实践和日常生活中，常常要计算体积。你看，稻草堆的重量，开挖水渠的土方，小高炉的容积……哪一处不要用到体积的计算呢？

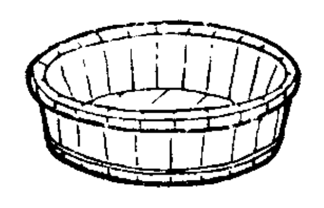
几何学上告诉我们许多立体的求积法，例如：圆柱的体



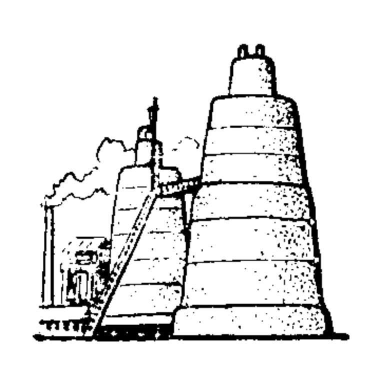
积公式、圆台的体积公式、圆锥的体积公式等等，这些公式，有些人可能已经相当熟悉了。







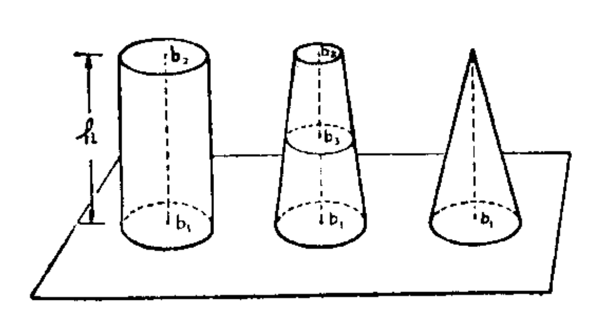
圆柱、圆台和圆锥是三种各不相同的几何图形．它们各有其特殊点，反映其质的区别的体积公式也就彼此不同。但是一切矛盾的事物，在互相对立的同时，因一定的条件，又是互相联系、互相贯通的。由运动的观点来看，变化圆台两底的大小直至相等时，圆台就变成圆柱；当圆台的一个底面缩小成为一点时，圆台就成为圆锥，都从数量的变化引起了性质的变化。



我们知道，圆台的体积

$$V=\frac{h}{3}(b_1+b_2+\sqrt{b_1b_2}),$$

式中 $h$ 表示圆台的高，$b_1$ 和 $b_2$ 分别是下底和上底的面积。




当把圆柱看作上下底面相等的圆台，即 $b_1=b_2$，这时

$$V=b_1h;$$

当把圆锥看作上底面为零的圆台，即 $b_2=0$，这时

$$V=\frac{1}{3}b_1h。$$

这样它们的体积公式都统一于

$$V=\frac{h}{3}(b_1+b_2+\sqrt{b_1b_2}),$$

恰好反映了这些对立的几何体在一定条件之下的同一性。

人们从不同事物的特殊的本质概括出它们共同的本质以后，这种认识还会有所发展。下面我们介绍一个叫做拟棱台公式，它能够体现多种公式的共性，可以用来计算初等几何里各种形体的体积，因此也有人把它叫做“万能公式”。这个公式是

$$V=\frac{h}{6}(b_1+b_2+4b_3)。$$

这里 $b_1$ 和 $b_2$ 分别表示位于两平行平面上的下底和上底的面积，$b_3$ 是中截面的面积，$h$ 是立体的高。

回过头来重看上述的圆台。通过计算可得

$$b_3=\frac{1}{4}(b_1+b_2+2\sqrt{b_1b_2}),$$

代入拟棱台公式，我们就有

$$V=\frac{h}{6}[b_1+b_2+(b_1+b_2+2\sqrt{b_1b_2})]$$

$$=\frac{h}{3}(b_1+b_2+\sqrt{b_1b_2})。$$

这岂不正是圆台的求积公式吗?

在毛主席的伟大哲学著作《矛盾论》里,为我们指出过:**“在一定场合为普遍性的东西,而在另一一定场合则变为特殊性。反之,在一定场合为特殊性的东西,而在另一一定场合则变为普遍性。”** 拟棱台公式既能用来计算圆台的体积,作为圆台特例的圆柱和圆锥,自然也可以用这个公式计算了。

至于棱台、棱柱和棱锥的体积计算,与圆台、圆柱和圆锥有完全类似的情况。

最后,再看一看球的情形。

b2

b3

b1

设 $r$ 是球的半径。

很明显 $b_1=0$, $b_2=0$, $b_3=\pi r^2$,

而 $$h=2r,$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{6}(0+0+4\pi r^2)\times 2r=\frac{4}{3}\pi r^3。$$

你看,它又变成球的体积公式了。

## 一个数的平方一定比原数大吗?

中学生大概都做过许多自然数平方的题目,如 $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$……$11^2=121$, $12^2=144$, $13^2=169$……从这些题目的结果,我们很容易得到这样一个印象:一个数的

平方总大于原数。

是不是总是这样呢？我们应该再进行一些实验。既然说是"一个数的平方"，我们就要研究各种各样的数，而不能局限于自然数。在小学里，我们除了自然数以外，还学过整数 0，还学过分数和小数。我们就要选一些不同类型的数来进行研究。

先看数 0：$0^2=0$，也就是说，数 0 的平方等于原数。这就否定了原来的印象。

再看看分数和小数：$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$。$\frac{4}{9}$比$\frac{2}{3}$大，还是小呢？这要通分比较，$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$，$\frac{4}{9}<\frac{6}{9}$，所以$\frac{2}{3}$的平方小于原数。

再看$(0.3)^2=0.09$，所以 0.3 的平方也小于原数。

是不是分数和小数的平方一定都小于原数呢？$\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$，$\frac{16}{9}$是大于$\frac{4}{3}$的。可见分数的平方也不一定小于原数。

到底哪种数的平方大于原数，哪种数的平方等于原数，哪种数的平方小于原数呢？

如果我们仔细地进行观察，研究它们之间的本质区别，就会发现，主要的分界线是 1，也就是说，大于 1 的数的平方总是大于原数，小于 1 而大于 0 的数的平方总小于原数，1 的平方等于原数，而 0 的平方也等于原数。

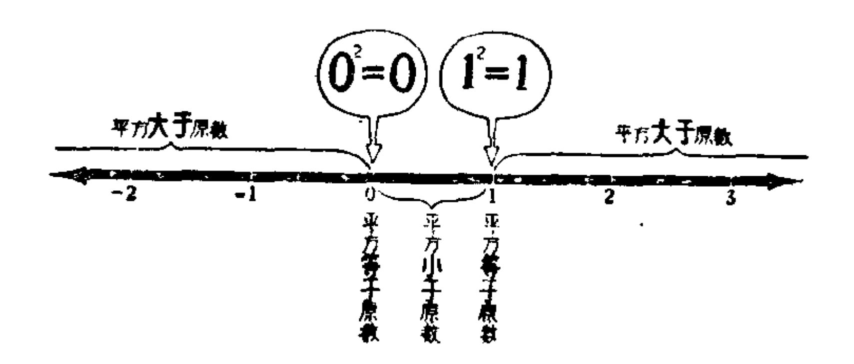
当我们在中学数学里学习到负数以后，还要进一步研究负数的情况。负数的平方总是正数，而正数总大于负数，所以负数的平方又大于原数。这样我们就有两个分界线 1 和 0 。这就把有理数划分成三个范围和两个特殊点；这两个特殊点 0 和 1，就是这三个数的范围的分界线。即：

(1) 大于 1 的数的平方总大于原数；

(2) 小于 1 而大于 0 的数的平方总小于原数；

(3) 小于 0 的数的平方大于原数；

(4) 1 和 0 的平方等于原数。

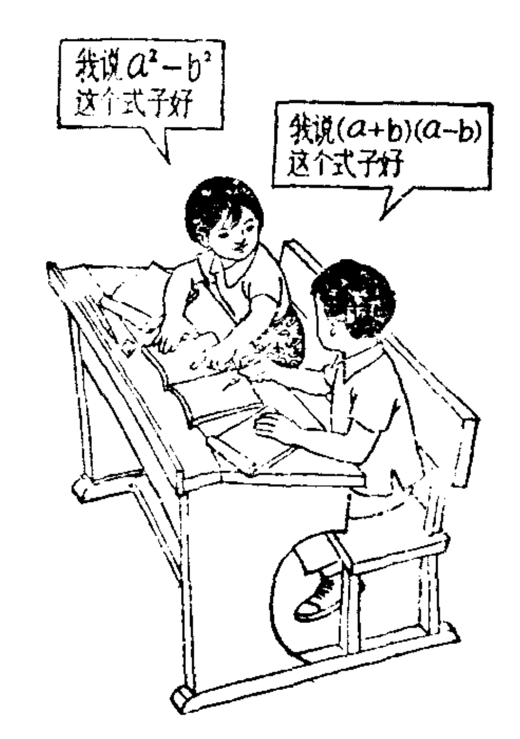



因此我们不论做什么事，都不要以一部分特殊现象当作普遍的结论，必须选择各种不同类型的代表，进行仔细的调查研究，然后再进行分析归类而得出结论。

## $a^2-b^2$ 和 $(a+b)(a-b)$ 哪一个式子好？

有一次两个同学争论着这样一个问题：$a^2-b^2$ 和 $(a+b)(a-b)$ 哪一个式子好？一个同学说，当然 $a^2-b^2$ 好，

因为$(a+b)(a-b)$是一个乘法题目，我们应该把它演算成为$a^2-b^2$。另一个同学反对他，理由是我们应该把$a^2-b^2$分解因式，他说一个式子能够分解因式，总要分解成为因式的乘积形式的。到底哪一位同学说得对呢？




我们不先回答这个问题，你可以从实践中看哪一个好。已知 $a=5.364$，$b=4.636$，求 $a^2-b^2$ 的值。如果把 $a$ 和 $b$ 的值代入后先平方再相减，那么

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2&=(5.364)^2-(4.636)^2\\
&=28.772496-21.492496\\
&=7.28。
\end{aligned}
$$

这样计算非常麻烦。

如果运用因式分解，先化成$(a+b)(a-b)$，得

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2&=(a+b)(a-b)\\
&=(5.364+4.636)(5.364-4.636)\\
&=10\times0.728\\
&=7.28。
\end{aligned}
$$

这就便当得多了，岂不是$(a+b)(a-b)$比$a^2-b^2$好吗？

现在不要忙下结论，让我们再看另一种情况：已知 $a=10$，$b=0.15$，求 $(a+b)(a-b)$ 的值。如果把 $a$ 和 $b$ 的值直接代入分别加减后再相乘，那么

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (10+0.15)(10-0.15) \\
&= 10.15\times 9.85 \\
&= 99.9775。
\end{aligned}
$$

这样计算又很费力。

如果用乘法公式，先化成 $a^2-b^2$，得

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \\
&= 10^2-(0.15)^2 \\
&= 100-0.0225=99.9775。
\end{aligned}
$$

这不是比较便当吗？从这样看起来，$a^2-b^2$ 又比 $(a+b)(a-b)$ 好了。

到底 $a^2-b^2$ 和 $(a+b)(a-b)$ 哪一个式子好呢？我们不能一般地回答这个问题，要看具体情况和要求。譬如在一个分式的分母里，总是要求尽可能分解成为因式的乘积形式，因为不论是分式化简时的约分，分式加减法时的通分，总以因式的形式比较方便。但如果在一个分式的分子里，那就不一定了。在演算分式加减法时，通分后，分子要进行加减运算，那就以若干项的代数和的形式比较方便了。

至于单独的这一个式子 $a^2-b^2$ 呢？那么 $a^2-b^2$ 和 $(a+b)(a-b)$ 都可以，不必要也不可能机械地定出哪一个

好的标准来。

应该从具体条件和要求的实际情况出发，要辩证地看问题，这就是我们的结论。

## 减去一个负数，为什么会跟加上一个和它绝对值相等的正数一样？

当我们开始学习正、负数的时候，对负数的性质感到有些奇怪，为什么 $4-(-1)$ 会等于 $4+1=5$ 的呢？

又如：$4-6=-2$，$5-9=-4$……

难道说，从 4 只橘子中可以吃掉 6 只？从 5 枝铅笔中能取出 9 枝吗？

这的确会引起人们思想上的矛盾。不过我们也会想到，现实生活中又确实有着这样的事情，例如：一个物件向右移动 4 尺后，又向左移动 6 尺，升高 5 米后又下降 9 米。

象这类问题，用数学式子把它们表示出来，就是：

$$4-6=-2;\quad 5-9=-4.$$

只是在这里，正数是表示向右和升高，负数表示向左和降低罢了。

任何一个数学概念或结果，都是一定的事物在一定条件下的抽象，因而不能无限制地应用。象$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$这些分数的

概念来自测量，但我们却不能用它去解释$\frac{1}{2}$个人、$\frac{1}{3}$头动物一样。

对于 $4-(-1)=4+1=5$ 这个问题，的确也能说明很多实际情况。例如：某生产队去年一年中的总收入为 7 万元，扣去农业成本共 3 万元，那么，纯收入就是 4 万元。

今年，他们的收入比去年多 1 万元，也就是说，纯收入比去年增加 1 万元，达到 5 万元。我们用加法计算增加，用正数表示收入，列出算式，就是：

$$4+1=5(\text{万元})。$$

同样，如果他们今年农业成本支出比去年减少 1 万元，那么，纯收入也会比去年多 1 万元，达到 5 万元。这跟上面类似，我们用减法来计算减少，用负数表示支出，列出算式，就是：

$$4-(-1)=5(\text{万元})。$$

从上面可以看出，在计算纯收入时，农业成本支出减少 1 万元，就相当于收入增加 1 万元。即

$$4-(-1)=4+1。$$

正和负是相对的，但是在把减法改成加法的条件下，原来要减去的那一个负数，就可以转化到它的反面，改作绝对值和它相等的正数。把上面的等式总起来，就得到：

$$4-(-1)=4+1=5。$$

这个式子确实可以说明减少支出同增加收入之间的辩

证关系。从这件事，我们知道增产和节约是一个事物的两个方面，我们不仅要努力增产，同时“**要进一步节约闹革命**”。

## $a+b$和$a-b$哪一个大？

$a+b$ 和 $a-b$ 哪一个大？有人会马上回答：当然 $a+b$ 比$a-b$大。事实真是这样吗？

其实，$a+b$ 和 $a-b$ 也可能相等，甚至 $a+b$ 还可能比 $a-b$ 小。例如：$a+0$ 和 $a-0$ 就是相等的。$3+(-2)$ 就比 $3-(-2)$小。无论什么事，都要经过认真的考虑才能作出正确的结论，不能草率。

那么当 $a$、$b$ 取什么数值时，$a+b$ 比 $a-b$ 大；取什么数值时，$a+b$ 比 $a-b$ 小；取什么数值时，$a+b$ 和 $a-b$ 相等呢？

要比较两个数的大小，可以用第一个数减第二个数，如果得到的结果是正数，那么第一个数比第二个数大。例如：$5-3=2$，$(-3)-(-7)=4$，所以 5 比 3 大，$-3$ 比 $-7$ 大。

如果第一个数减第二个数的结果是负数，那么第一个数比第二个数小。例如：$4-6=-2$，$(-5)-(-2)=-3$，因此 4 比 6 小，$-5$ 比 $-2$ 小。

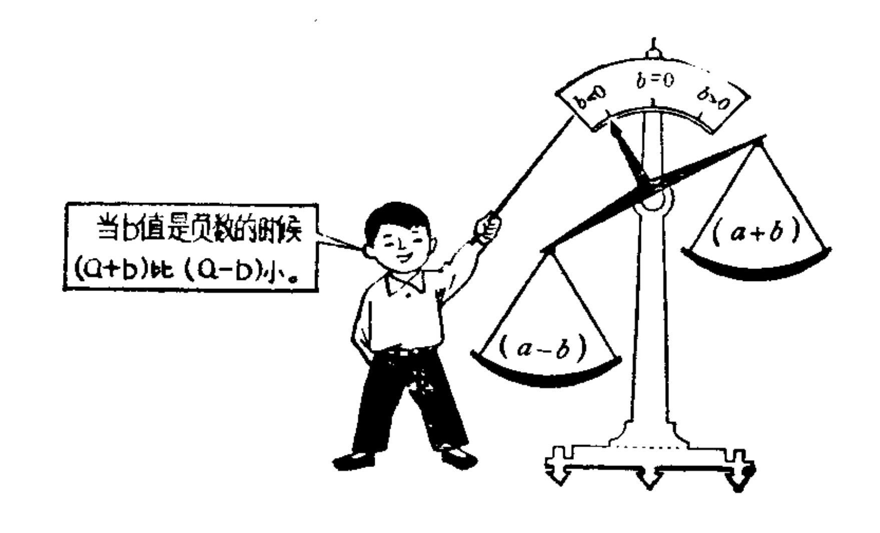
如果第一个数减第二个数得到的结果等于0，那么这两个数显然相等。

现在，我们就用这个方法来比较 $a+b$ 和 $a-b$ 的大小。$(a+b)-(a-b)=2b$。也许有人说，$2b$ 是正数。这样说就犯了粗枝大叶的毛病。

$2b$ 一定是正数吗？

你仔细看看，就知道只有当 $b$ 是正数的时候，$2b$ 才是正数。如果 $b$ 是负数，$2b$ 也就是负数。如果 $b$ 等于0，那么 $2b$ 也等于0。

因此我们可以作出这样的结论：当 $b$ 是正数时，$a+b$ 比 $a-b$ 大；当 $b$ 是负数时，$a+b$ 比 $a-b$ 小；当 $b$ 等于0时，$a+b$ 等于 $a-b$。



## 什么叫做贾宪三角形?

让我们先看看下面这个表:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1\\
\end{array}
$$

....................................

这个表就叫做贾宪三角形。

这一三角形，在欧洲叫做帕斯卡三角形。帕斯卡是在1654 年才研究出这个规律的，比我国的贾宪约迟 600 年。这也充分说明我国的科学是发达很早的。

这个表是怎样排出来的呢?

让我们来看看二项式 $a+b$ 乘方的展开式:

$$(a+b)^1=a+b,$$

它的两项的系数是 1 和 1;

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

它的三项的系数依次是 1、2、1;

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

它的四项的系数依次是 1、3、3、1;

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

它的五项系数依次是 1、4、6、4、1;

…………………………………

把这些系数依次排起来,就得到这个三角形了。

至于第一行的 1, 是为了使三角形从一个数开始,所以写上的。但也有它的意义,那就是只要 $a+b\neq 0$, 则规定

$$(a+b)^0=1。$$

现在让我们再来看看这个表有什么规律?

我们仔细一看,就知道这个表具有这样内在的规律:

它每下一行的数比上一行多 1 个,两边都是 1, 中间各数都写在上一行两数的中间,且等于它们的和。也就是说,它的各项的系数, 就是前一行相应的前后两个项的系数的和。

根据这个规律,就可以将这个表无限地写下去。

这个表有什么用呢?

有了这个表, 我们立即可以写出某二项式的乘方的展开式,不必再花很多时间去计算了。

譬如: 要求$(a+b)^7$的展开式,
根据这个三角形表,立即可以得到:

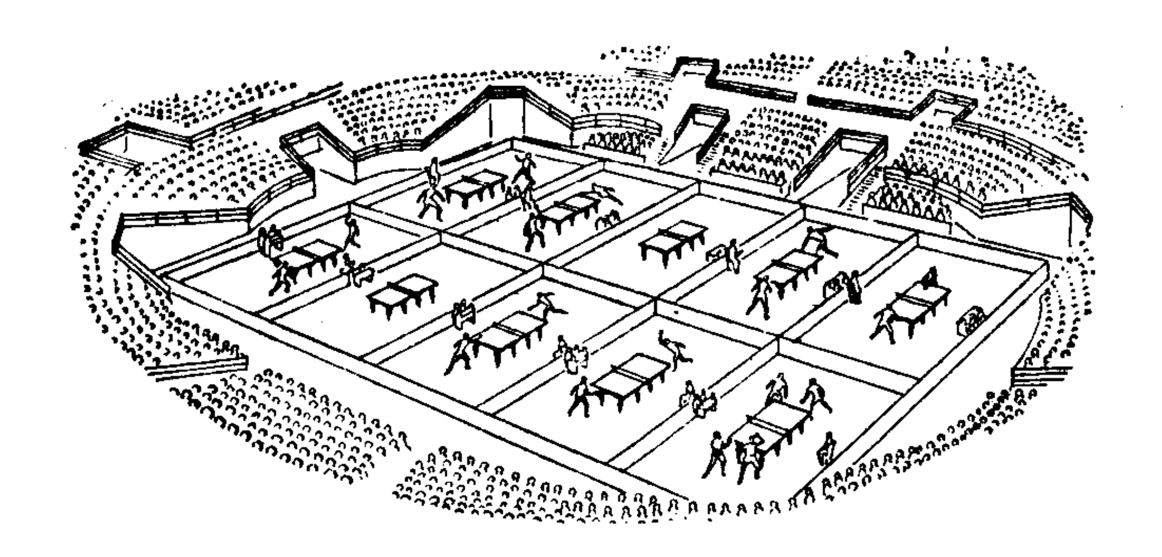
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3$$
$$+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7。$$

如果我们要求$(a+b)^9$的结果，只要把这个三角形再写下去两行，就可以得出$(a+b)^9$的展开式的结果。

## 怎样计算用淘汰制进行的比赛场数？

伟大领袖毛主席教导我们："**发展体育运动，增强人民体质**"。二十年来我国体育运动有了蓬勃的发展，取得了非常巨大的成就！在国际上我国的体育运动水平是名列前茅的，这跟旧中国真是天地之别。在旧中国，帝国主义骂我们是"东亚病夫"，体育运动水平很低。在旧社会里，我国劳动人民深受三座大山的压迫和剥削，生活在水深火热之中，根本谈不上体育运动。全国解放了，在伟大领袖毛主席领导下，伟大的中国人民从此站起来了，她象巨人般屹立在世界的东方，从此，"东亚病夫"的时代已经一去不复返了。为了不断提高我国的体育运动的水平，互相学习交流经验，我们经常要举行或参加各种类型的体育竞赛活动，因此我们经常会遇到这样的问题：要举行一次球类或者棋类的比赛，用淘汰制来进行，那么怎样根据报名的人数来计算比赛的场数，并进行具体安排呢？这对于比赛的顺利进行是非常重要的。

让我们看看 1961 年 4 月，在我国首都北京举行的第二十六届世界乒乓球锦标赛吧。



第二十六届世界乒乓球锦标赛，报名参加男子单打的有 158 人，报名参加女子单打的有 96 人，应该进行多少场比赛呢？

计算方法很简单，只要从报名的人数上减去 1，就得到所需要进行比赛的场数。譬如男子单打，如果没有缺席，应该进行 $158-1=157$ 场比赛。女子单打，应该进行 $96-1=95$ 场比赛。

为什么比赛的场数，总是比人数少 1 呢？怎样安排这些比赛的呢？

因为最后参加决赛的应该是 2 个人，这 2 个人应该从 $2^2=4$ 个人中比赛产生，这 4 个人又应该是从 $2^3=8$ 个人中产生的。这样 $2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128, 2^8=256$……如果报名的人数恰巧是 2 的整数次幂，即 $2$、$2^2$、$2^3$、$2^4$、……那么只要按照报名人数每二人编成一组，进行比赛，逐步淘汰就是了。假如报名的人数不是 2 的整数次幂，那么在比

赛中间就需要有轮空的。如果我们开始时就按照2个人一组安排比赛，有些轮空的将在中后阶段，而中后阶段的比赛，一般实力较强，比赛较紧张，轮空与不轮空机会上的差别就显得比较大。这是因为第一轮轮空相当于打败一个人，如果要在第二轮或第三轮里轮空，就相当于打败了三个人或五个人。为了照顾机会比较平均，比赛越来越热烈，我们总是把轮空的放在第一轮。譬如男子单打报名的是158人，而158大于$2^7$，小于$2^8$。因为$2^7=128$，$158-128=30$。那么，第一轮应该从158人中淘汰30人，即进行30场比赛。这样第一轮参加比赛的是30组60人，轮空的98人。第一轮比赛后，淘汰30人，剩下128人，从第二轮起就没有轮空的了。第二轮要进行64场比赛，第三轮是32场，第四轮16场，第五轮8场，第六轮4场，第七轮2场，第八轮就是决赛，产生冠军和亚军。这样进行的比赛场数一共是：

$$30+64+32+16+8+4+2+1=157,$$

恰恰比158少1。

同样，在女子单打比赛中，报名的是96人，96比$2^6$大，但比$2^7$小；$2^6=64$，$96-64=32$，第一轮要淘汰32人，就必须进行32场比赛，第二轮是在64人中进行32场比赛，第三轮是16场，第四轮是8场，第五轮是4场，第六轮是2场，第七轮是决赛。一共比赛的场数是：

$$32+32+16+8+4+2+1=95,$$

它比 96 少 1。

在男女单打比赛中，我国乒乓球选手荣获第 26 届世界乒乓球比赛男子单打冠军和女子单打冠军。这充分显示了我国乒乓球技术具有很高的水平。

不妨再从一般情况来研究。如果报名的人数为 $M$ 人。而 $M$ 比 $2^n$ 大，但比 $2^{n+1}$ 小，那么就需要进行 $n+1$ 轮的比赛，其中第一轮所需要比赛的场数是 $M-2^n$，第一轮比赛淘汰 $M-2^n$ 人后，剩下的人数为 $M-(M-2^n)=2^n$。以后的 $n$ 轮比赛中，比赛的场数为：

$$2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots\cdots+2^3+2^2+2+1。$$

而

$$\begin{aligned}&2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots\cdots+2^3+2^2+2+1\\&=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^3+2^2+2+1)\times 1\\&=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^3+2^2+2+1)(2-1)\\&=(2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^4+2^3+2^2+2)\\&\quad-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2^3+2^2+2+1)\\&=2^n-1。\end{aligned}$$

所以一共比赛的场数是 $(M-2^n)+(2^n-1)=M-1$，即比人数少 1。

其实，只要我们抓住问题的实质，就可以用非常简单的方法来说明。因为每一场比赛总是淘汰 1 人。在 $M$ 人参加的比赛中，要产生 1 个冠军就得淘汰 $M-1$ 人，所以就得比赛 $M-1$ 场。这不是很明白吗？

如果你们要举办一次球类比赛，报名的是50人，用淘汰制进行，要安排几场比赛呢？一共赛几轮呢？你会计算吗？

## 怎样计算用单循环制进行的比赛场数？

用淘汰制进行球类比赛，比赛场数比较少，所需用的时间比较短，所以报名人数较多的个人比赛往往采用这种办法。淘汰制有一个缺点，那就是要获得冠军，在整个比赛过程中不能有失。而且如果两强相遇过早，所产生的亚军和其他名次往往与实际水平不完全相符。因此在报名单位较少的一些团体赛中，往往不采用淘汰制而采用另一种比赛方法——循环制。

用循环制进行的比赛场数该怎样计算呢？让我们仍旧举二十六届世界乒乓球赛的例子。报名参加男子团体赛的有 26 个单位，报名参加女子团体赛的有 19 个单位。如果用单循环制进行比赛，每一个队要和另一个队比赛一场，所以在 26 个男子队中，每一队要进行 25 场比赛，26 个队就有 $25\times 26$ 场比赛。但每场比赛是两队互相交锋的，因此这样计算，就是把一场比赛算做两次了，而实际的比赛场数是$\frac{25\times 26}{2}=325$（场）。如果 19 个单位的女子团体赛用单循环制进行比赛，就要进行$\frac{19\times 18}{2}=171$（场）。

一般说来，单循环制的比赛，报名人数如果有 $n$ 队，那么一共比赛的场数是

$$\frac{n(n-1)}{2}。$$

但这样安排场次太多，费时太长。因此，这次乒乓球赛采用的就不完全是单循环制，而是分组双轮单循环制。

分组双轮单循环制是怎样的呢？譬如男子团体的 26 个队，分成三个组，两组各 9 队，一组 8 队。在这三组中用单循环制进行比赛，产生三个分组冠军，这三队再进行第二轮的单循环赛，产生冠亚军。这样第一轮的比赛场数是：

$$\frac{9\times 8}{2}+\frac{9\times 8}{2}+\frac{8\times 7}{2}=36+36+28=100(\text{场})。$$

第二轮是

$$\frac{3\times 2}{2}=3(\text{场})。$$

一共是

$$100+3=103(\text{场})。$$

比原来的 325 场大大减少了。

同样，女子团体赛也把 19 队分成三组，两组各 6 队，一组 7 队。这样第一轮的比赛场数是

$$\frac{6\times 5}{2}+\frac{6\times 5}{2}+\frac{7\times 6}{2}=15+15+21=51(\text{场})。$$

第二轮是

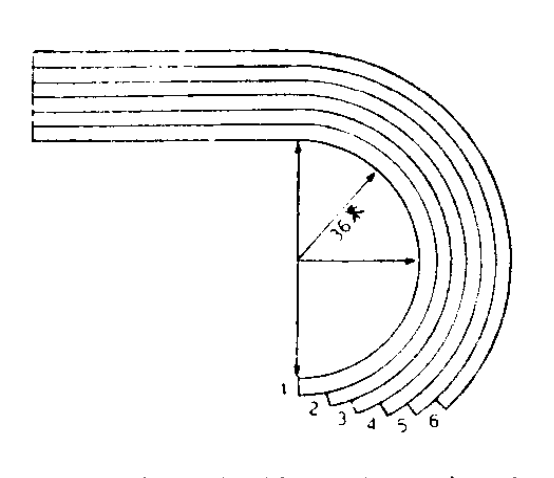
$$\frac{3\times2}{2}=3(场)。$$

一共要比赛

$$51+3=54(场)。$$

你不妨计算一下：在一个学校里如果有 15 个班级，每个班级有一队球队参加比赛，若用单循环制进行，一共要比赛几场？如果把 15 队分成三组，每组 5 队，采用分组双轮单循环制，一共要比赛几场？

## 200 米赛跑，跑外圈的人的起点，为什么比跑里圈的人前面得多？



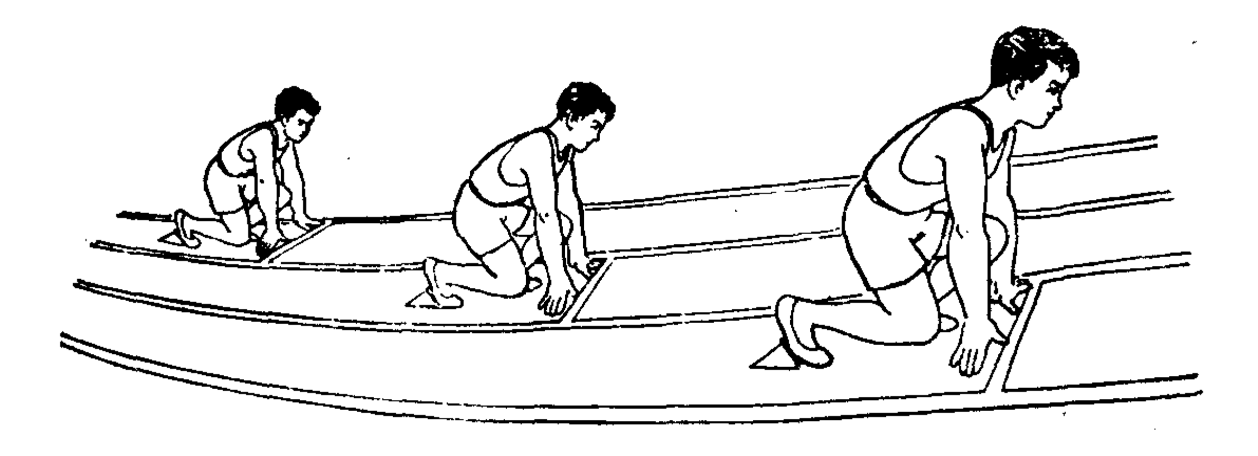

毛主席教导我们："**发展体育运动，增强人民体质**"。

运动会里经常有一个 200 米的赛跑项目。一般赛跑的标准场地，它的内圈长 400 米，每条跑道阔是 1.22 米。这个赛跑项目的跑道的第一段一般是半圆形的弯道，然后转入直道。如果有 6 个人同时赛跑，那就要有 6 条等间隔的跑道。为了便于最后比较快慢，比赛终点排在一条直线上。那么，这些起点究竟应该怎样决定

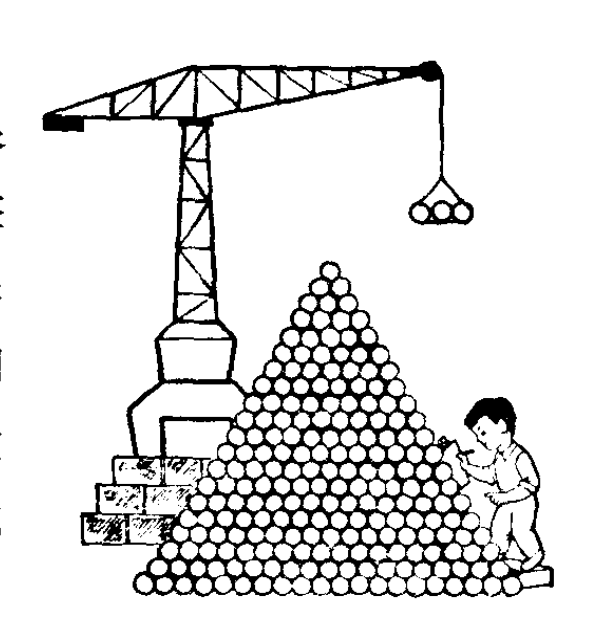
呢?

我们知道,一个圆的周长和它的直径的比是一定的,这个比值叫做圆周率$\pi$,它的近似值是3.14。由于圆的周长是它的直径的3.14倍,因而半圆弧的长也是圆的半径的3.14倍。如果半径增加1米,那么半圆弧的长就要相应地增加3.14米。

通常弯道里圈的半径是36米。按田径赛规则规定,第一圈(最里圈)的全程长度,须由离开边缘外面30厘米处,沿着跑圈丈量,而实际跑的弯道长是36.3米×3.14≈114米。从第二圈起,各分道的丈量,应各离开左手线外边20厘米,因此第二道起跑线要比第一道移前(1.22米-0.10米)×3.14≈3.52米;第三道起跑线比第二道移前(后三道与此相同)1.22米×3.14≈3.83米。6个起点成为阶梯形,在最外圈的人的起点要比最里圈的人的起点向前移动约18.84米之多。我们这样确定起点,就能使6个人每人都在弯道上跑114米,再在直道上跑86米,而终点都在同一直线上。



# 为什么数一数堆垛的底层，就能算出它的总数？



在工厂的仓库或堆栈中，钢管或圆木材等材料，都是很整齐地堆放着的。这样不仅整齐美观，更重要的是统计起来非常便利。譬如一堆长短粗细相同的钢管，工人同志只要数一数底层有多少根，就立刻知道这一堆钢管有多少根。

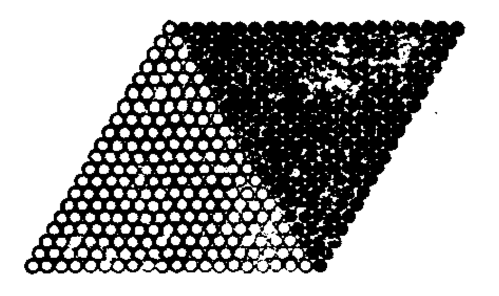
如果底层是 20 根，那么倒数第二层就是 19 根，第三层是 18 根，……最上面的一层（也就是第 20 层）只有 1 根。工人同志不必一根一根地数，只是把底层的根数加顶层的根数、乘以层数、再除以 2，即：

$$\frac{(20+1)\text{根}\times 20}{2}=\frac{21\text{根}\times 20}{2}=210\text{ 根},$$

就得到这一堆钢管的数目是 210 根。

如果底层是 50 根，那么总数就是：

$$\frac{(50+1)\text{根}\times 50}{2}=\frac{51\text{根}\times 50}{2}=1,275\text{ 根。}$$



为什么这么一算就对了呢？

其实道理也很简单。假如你在这一堆钢管旁边，再并排地放上同样的一堆，只是上下倒置，那么每一层的根数恰巧是底层同顶层根数的和。譬如底层是20根，第一层是1根，这两层相加是21根；倒数第二层是19根，第二层是2根，这两层相加也是21根；这样，所有各层的总数都是21根，层数仍旧是20层。21×20所得的420，就是这两堆的总数。而原来一堆钢管的根数就是这两堆总数的一半。得算式

$$\frac{(20+1)\text{根}\times 20}{2}=\frac{21\text{根}\times 20}{2}=210\text{ 根。}$$

毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"

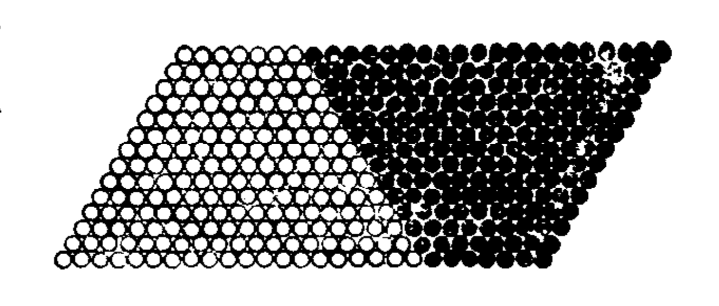
在我们掌握了这两个具体问题的计算过程和计算方法以后，就可以进行概括工作，找出同类问题的一般公式，并进一步得到当顶层不止一根时问题的计算方法。

一般的计算公式是：

$$\text{总数}=\frac{(\text{底层根数}+\text{顶层根数})\times\text{层数}}{2}\text{。}$$

这个公式对不对呢？还需要再回到实践中去检验，看

它是否能够达到预想的目的。譬如说，这堆材料的第一层不是一根，而是 7 根，底层是20根，每层仍是挨次减少 1 根，总数是多少根呢？



我们仍然用前面的公式来计算：

$$\frac{(\text{底层根数}+\text{顶层根数})\times\text{层数}}{2}$$

$$=\frac{(20+7)\text{根}\times 14}{2}$$

$$=\frac{27\text{根}\times 14}{2}$$

$$=189\text{ 根。}$$

对照上面的图形，这计算方法是正确的。

铅笔厂里装运铅笔，就是把运载车上的盛器做成倒置的等边三角形。所以工人同志很容易地知道铅笔的枝数。

最后，顺便提一下，在我们刚学珠算加法时，往往要反复计算

$$1+2+3+\cdots\cdots+100$$

的和，从而在准确的基础上提高速度。现在看来，这不过是堆垛问题的一个特例罢了。

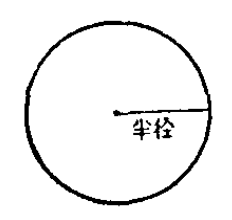
# 为什么车轮是圆的?

为什么车轮是圆的? 你也许会说，这个问题还不简单，因为圆的轮子容易滚动啊!

圆的轮子能滴溜溜的滚动，这只不过是一种表面现象。毛主席教导我们说:“**我们看事情必须要看它的实质，而把它的现象只看作入门的向导，一进了门就要抓住它的实质，这才是可靠的科学的分析方法。**”我们不仅要看圆的表面现象，而且一定要抓住圆的实质，对圆进行科学的分析，找出车轮做成圆形的根本原因。

圆有什么重要的性质呢?

我们先看看下面画的一个圆。外面的圆圈叫圆周，画圆圈时圆规扎的一点(为了容易看见，现在画成一个黑点)，




叫圆心。让我们拿一根尺子量一量圆周上任何一点到圆心的距离吧，它们都是相等的。这相等的距离，叫做半径。这就是圆的重要性质。

如果把车轮做成圆形，车轴安在圆心上，当车轮在地面滚动的时候，车轴离开地面的距离，就总是等于车轮半径那么长。因此安装在车轴上的车厢，车厢里坐的人，都将平稳地被车子拉着走。假设这车轮子是个破的，已经不成圆形了，轮缘上高一块低一块的，也就是说从轮缘到轮子圆心

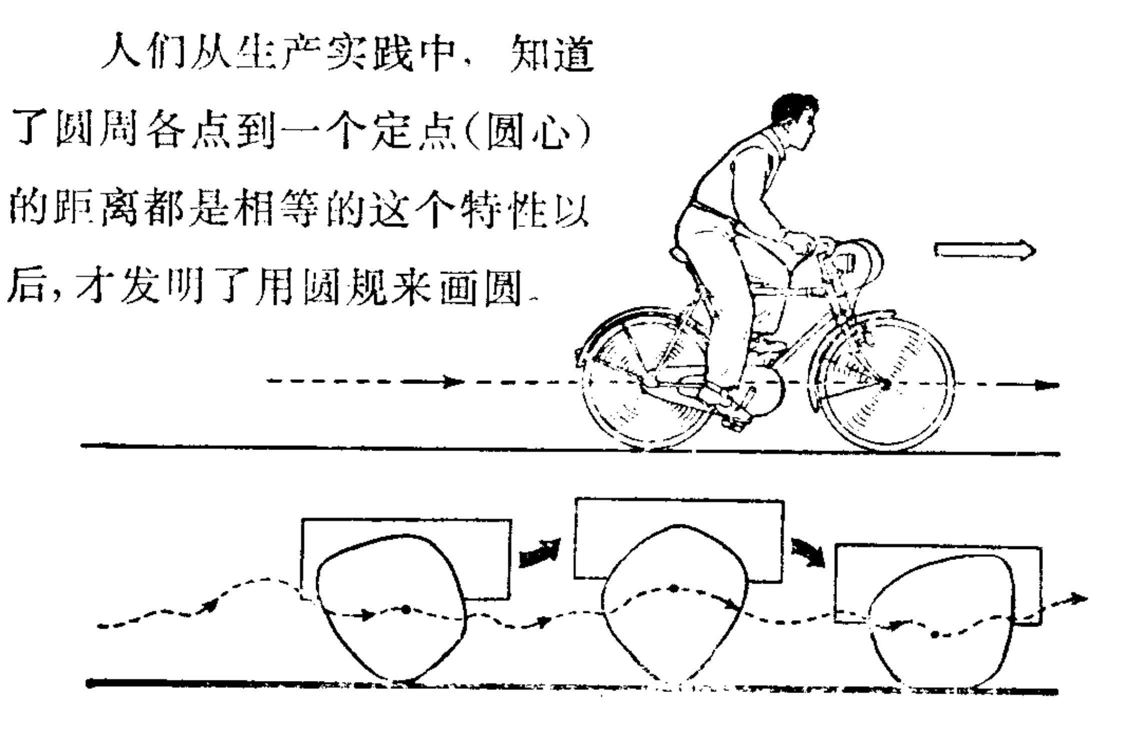
的距离都不相等，那么这种车子走起来，一定要把你的头颠昏。

车轮做成圆的，当然也还有别的原因，例如：当一样东西在地上滚动的时候，要比在地面上拖着走省劲多了．这是因为滚动摩擦阻力比滑动摩擦阻力小的缘故。

那么，这时你一定知道为什么画圆时要用圆规了。因为圆规脚张开后，它两脚的距离是不变的。

人们什么时候认识了圆的这个性质的呢？这确是很早以前的事了。最初，是大自然给予了人们以启发，看，天上的太阳，月半的月亮，都是多么圆啊！这些客观存在的事物，使人们得到了圆的形象。逐渐产生了圆的概念。人们也开始学着画圆，可是要画出一个十分光滑的圆来，确实很不容易。

人们从生产实践中，知道了圆周各点到一个定点(圆心)的距离都是相等的这个特性以后，才发明了用圆规来画圆。



# 怎样用直尺画出正五边形？

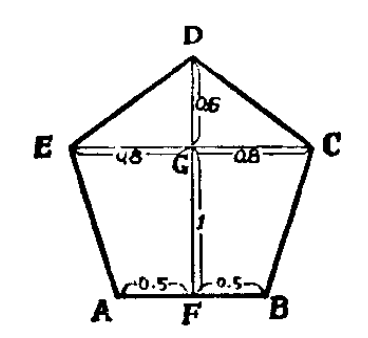
伟大领袖毛主席说："**中国是世界文明发达最早的国家之一**"。

我国劳动人民在长期生产实践中，积累了许多宝贵的经验，在我国民间广泛流传着许多画正五边形的口诀，现在许多木工、石工师傅也还是根据这些口诀来做正五边形的。其中有一口诀是：

"一六中间坐，二八分两旁。"

按这口诀就能用直尺近似地作出一个正五边形。

什么叫做"一六中间坐"呢？这就是取 1 个单位长的线段 $AB$（即 $AB$ 等于 1，如下图），然后在 $AB$ 的中点 $F$，作垂直线 $FGD$，长度是 1.6，其中 $FG$ 的长度是 1，$GD$ 的长度是 0.6。"二八分两旁"，是通过 $G$ 作平行于 $AB$ 的线 $EGC$，而 $EG$ 和 $GC$ 各为 0.8。连结 $BC$、$CD$、$DE$、$EA$，就得到一个正五边形的近似图形。




尽管这样得到的五边形不是真正的正五边形，却是一个非常理想的近似图形。不妨来看看它精确到怎样的程度。

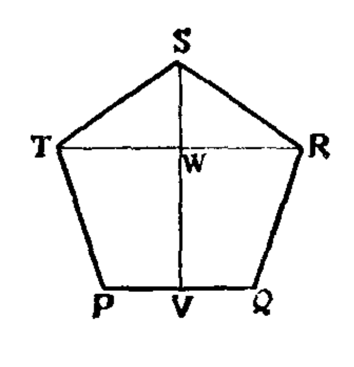
由勾股定理，可知 $DE$ 和 $DC$ 的长度都是 1，$AE$ 和 $BC$ 的长度都是 1.044。所以从长度来讲，

把它同正五边形的五个边比较一下，知道它们有三边相同，还有两边也不过是相差 4.4%，在实际生产应用中，这是个很小的数字。

再来看看它们的角度，正五边形的每个角度是108°，而在所得到的近似的五边形中，$\angle EAB=\angle ABC=106°42'$，仅比108°小1°18′；而$\angle EDC=106°16'$，比108°小1°44′；$\angle AED=\angle BCD=110°10'$，比108°大2°10′。这些相差的角度有多大呢？拿2°10′来讲，约略是钟表面上1分钟的三分之一那么大小；与108°比较，相对误差不过是2%，这可以说是相当精确的了。

我们再从每边边长为1的正五边形 $PQRST$ 出发（如下图），取 $PQ$ 的中点 $V$，连结 $VS$，$TR$ 与 $VS$ 交于 $W$。

通过计算，可知：




$$SW=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\approx 0.588,$$

$$TW=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\approx 0.809,$$

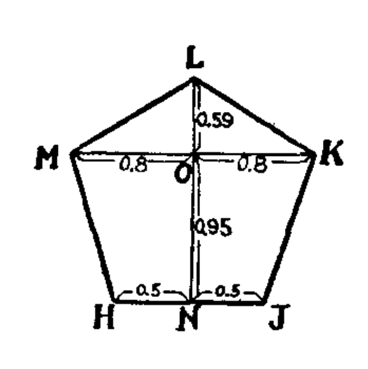
$$WV=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\approx 0.951。$$

从这里可以看出，前面所说的近似图形，就是将 $SW$、$TW$、$WV$ 用四舍五入的办法取小数后一位的近似值。这就是“一六中间坐，二八分两旁”。因此用这两句口诀来作五边形，能跟正五边形很接近。

大兴县青云店公社有位木工老师傅，还有个作正五边形的两句更精确的口诀，这就是：

“九五顶五九，八五两边分。”

意思就是：先取单位长 $HJ$（如下图），在 $HJ$ 的中点 $N$ 作垂线 $NOL$，其中 $NO$ 为 0.95，$LO$ 为 0.59，然后通过 $O$ 作 $HJ$ 的平行线 $MOK$，其中 $MO$ 和 $OK$ 为 0.8，连结 $HM$、$ML$、$LK$、$KJ$，图形 $HJKLM$ 就是正五边形的近似图形。与上页的 $PQRST$ 正五边形相比，$LO$ 和 $ON$ 实际上是 $SW$ 和 $WV$ 的值用四舍五入的办法取两位小数的近似值。




因为 $$HJ=1;$$

再通过计算，可以知道：

$$ML=LK\approx 0.994;$$

$$MH=JK\approx 0.996。$$

而 $$\angle MLK\approx 107°11',$$

$$\angle KJH=\angle JHM\approx 107°31',$$

$$\angle LMH=\angle LKJ\approx 108°53'。$$

从长度来讲，误差不过是千分之六。从角度来讲，误差最多不过是 53′，不超过 1°。

从这里还启发我们，如果对 $TW$、$SW$ 和 $WV$ 的值也用四舍五入的办法取两位小数的近似值，还可以得到更进一

步的结果。也就是，我们取

$$MO=OK=0.81,$$

$$LO=0.59 \text{ 和 } ON=0.95,$$

那么口诀也可以改为：

“九五顶五九，八一两边分。”

这时，

$$ML=LK\approx 1.0021,$$

$$MH=JK\approx 0.9993。$$

而

$$\angle MLK=107°52',$$

$$\angle KJH=\angle JHM\approx 108°4',$$

$$\angle LMH=\angle LKJ\approx 108°0'。$$

从长度来讲，误差仅为千分之二，从角度来讲，误差最多不过 $8'$，精确的程度应该说是使人十分满意了。

从上面所介绍的画正五边形的方法中，我们可以看出我国劳动人民在生产实践中就是不断地总结经验，精益求精。我们一定要学习我国劳动人民这种精神，在三大革命运动中，为社会主义建设事业作出更大的贡献！

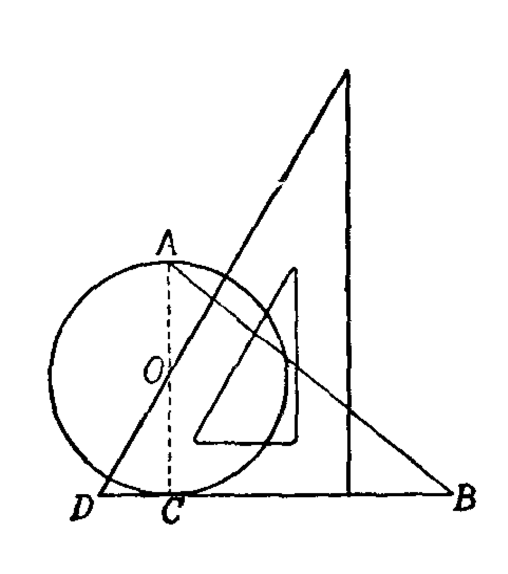
## 为什么用三角尺可以画出圆周长？

在工厂里，画图样的时候，往往需要画出一条长度等于某一个圆的圆周长的线段。有时候，这条线段代表一条轮

槽，它的长度正好等于轮的周长；有时候，这条线段代表一个齿条，它的长度正好等于齿轮的周长。你可知道，要画出一条线段，使它的长度正好等于某一个圆的圆周长，该怎样画法？这个问题，很多人曾作过研究，得出了不少近似的画法。

工厂里老师傅有一种好的画法，这种画法不仅简单，只要用一块三角尺就可以了，而且相当精确。我们先看看它是怎么画的：

拿一块 60° 的三角尺，盖住半个圆，使三角尺的斜边通过圆心 $O$，又使三角尺的短边与圆 $O$ 相切于 $C$。接着延长短边到 $B$，使 $DB=3r$，也就是说，使 $BD$ 的长度等于半径 $OC$ 的 3 倍。这里 $D$ 是三角尺中 60° 角的顶点。通过切点 $C$ 作出直径 $AOC$，连结 $AB$，那么 $AB$ 就是圆 $O$ 周长一半的线段了。




为什么 $AB$ 等于圆 $O$ 周长的一半（$AB=\pi r$）呢？

我们知道，在直角三角形 $CDO$ 中，一个锐角是另一个锐角的两倍，那么斜边是短边的两倍。

设 $CD=x$，又 $OC=r$，那么

$$OD=2x。$$

根据勾股定理，

$$OD^2=CD^2+OC^2,$$

即

$$(2x)^2=x^2+r^2,$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}r。$$

又根据勾股定理，在直角三角形 $ABC$ 中，有

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2\\&=(2OC)^2+(BD-CD)^2\\&=(2r)^2+(3r-x)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad AB&=\sqrt{(2r)^2+(3r-x)^2}\\&=\sqrt{4r^2+9r^2-6rx+x^2}\\&=\sqrt{13r^2-6r\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2}\\&=\sqrt{\left(13-2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)r^2}\\&\approx\sqrt{9.8692317183}\,r\\&\approx3.14153r。\end{aligned}$$

我们知道圆周率 $\pi=3.14159\cdots\cdots$，圆周长的一半应该是 $S=\pi r=3.14159\,r$。

而这里的 $AB=3.14153\,r$。这两个式子右边 $r$ 前面的系数只相差

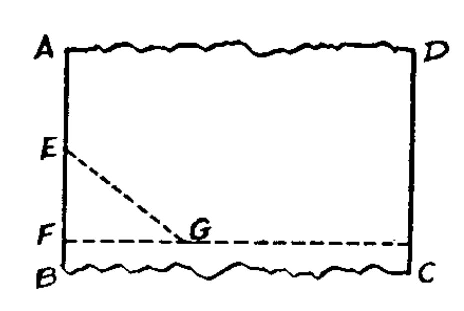
$$3.14159-3.14153=0.00006,$$

这证明上面的画法是相当准确的。

有了这个方法，我们在生产实践中要用三角尺画出圆件的周长就很便当了，只要知道圆件的半径，立即可以画出圆的周长了。

## 不用直角尺，怎样巧妙地画直角？

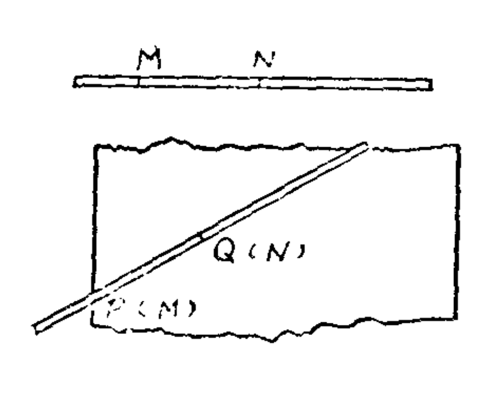
如果有一块长方形的木板，它的两条对边是整齐且平行的，但另外两条对边参差不齐，需要用锯子锯整齐，而你手边没有直角尺，你能正确地画出一个直角吗？我们拿出一把有刻度的直尺，先在 $AB$ 边上量出相距 30 cm 的两个点 $E$ 和 $F$，然后分别以 $E$ 点和 $F$ 点为圆心，以 50cm 和 40cm 为半径划圆弧，两弧交于 $G$ 点，连接 $FG$，则 $\angle EFG=90°$。沿 $FG$ 锯下，就把 $BC$ 边锯整齐了。用同样方法，也可以把 $AD$ 边锯整齐。

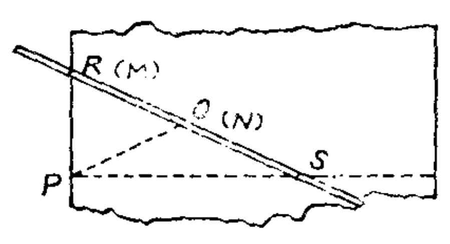



为什么说 $\angle EFG$ 是直角呢？因为这时 $\triangle EFG$ 的三边之比 $EF:FG:EG$ 为 $3:4:5$，恰与勾三股四弦五的直角三角形相似。因此，它也是一个直角三角形，长边 $EG$ 的对角 $\angle EFG$ 就是直角。

假若连有刻度的直尺也没有，你要画出直角，又该怎么办呢？

我们可以找一根比较直的木杆，用粉笔在木杆上画了两个点 $M$ 和 $N$。然后把木杆斜放在木板上，使 $M$ 点靠着木板的边，用粉笔在 $M$ 和 $N$ 的位置记下两个点 $P$ 和 $Q$。再把木杆换一个方向，使 $N$ 点不动，$M$ 点靠着木板的边，在 $M$ 点的位置记下 $R$ 点。再把 $RQ$ 延长，在延长线上截取 $QS=MN$，连接 $PS$，则 $\angle RPS=90°$。用这个简捷的方法就可以作出直角，把木板的两条对边锯齐。




为了证明 $\angle RPS$ 是直角，我们连结 $PQ$。由于 $RQ=PQ=QS$，所以 $\triangle RQP$ 与 $\triangle SQP$ 都是等腰三角形。因此

$$\begin{aligned}\angle RPS &= \angle RPQ+\angle QPS \\ &= \angle PRQ+\angle QSP。\end{aligned}$$

由于 $\angle RPS$、$\angle PRS$、$\angle RSP$ 为 $\triangle RPS$ 的三个内角，它们的和为 $180°$，故 $\angle RPS=90°$。

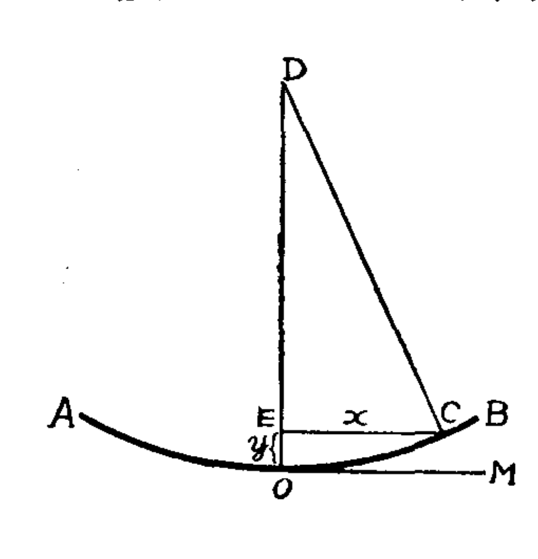
## 怎样画出半径为几百米的大圆弧？

在造船过程中，工人师傅经常要在钢板上画出半径达几百米的大圆弧。通常画一般的圆弧，只要拉一根绳子，固

定一端，将绳子拉紧，移动另一端，就能得到圆弧了。但是，要画出半径为几百米的大圆弧，就不能用这个方法了。一方面没有这样大的场地，让老师傅拉着几百米长的绳子画圆弧；另方面即使有这样的场地，画起来也太不方便了，怎么办呢？

工人师傅在生产实践中创造了一种很好的方法。现在我们假设这条圆弧已经画好了，先看看它有什么特性，就知道工人师傅创造的画大圆弧的方法是非常科学的。

假如我们所需要的半径为$R$的圆弧$AB$已画好了，圆心为$D$，$\widehat{AB}$的中点为$O$，圆弧在$O$点的切线是$OM$。连结$OD$，则$OD \perp OM$。在$\widehat{AB}$上任取一点$C$，看看$C$点的位置有什么特点？




作$CE \perp OD$，记$CE=x$，$OE=y$，

则
$$y=OE=OD-ED。$$

由于$\triangle CED$为直角三角形，故

$$ED=\sqrt{DC^2-CE^2}=\sqrt{R^2-x^2},$$

从而

$$y=R-\sqrt{R^2-x^2}$$
$$=R\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right]。$$

在这个表达式中，出现了开方运算，我们可以设法简化它。

我们再看看 $\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}$ 和 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2$ 这两个数的平方：

$$\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right]^2=1-\left(\frac{x}{R}\right)^2,$$

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^2=1-\left(\frac{x}{R}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{R}\right)^4。$$

由于 $R$ 是个很大的数，故 $\frac{x}{R}$ 很小，$\left(\frac{x}{R}\right)^4$ 更是微不足道，因此 $\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}$ 与 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2$ 是很接近的两个数，我们就可用后者替换前者而简化计算。利用这个替换，即有

$$y=R\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2R^2}\right)\right]=\frac{x^2}{2R},$$

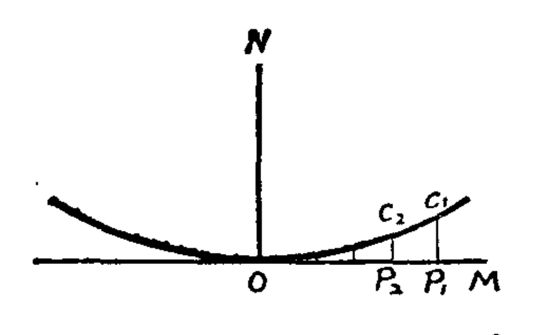
即
$$OE=\frac{CE^2}{2R},$$

这就是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意点的位置的特点。

因此，工人师傅要在钢板上画大半径的圆弧时，就先作两条相互垂直的直线 $OM$、$ON$。再在 $OM$ 上取一系列点 $P_1$、$P_2$……，过 $P_1$、$P_2$……作 $OM$ 的垂线 $C_1P_1$、$C_2P_2$，……，使

$$C_1P_1=\frac{OP_1^2}{2R},\quad C_2P_2=\frac{OP_2^2}{2R},\quad ……。$$

由于这些点 $C_1$、$C_2$……的位置都具备我们刚才分析的圆弧

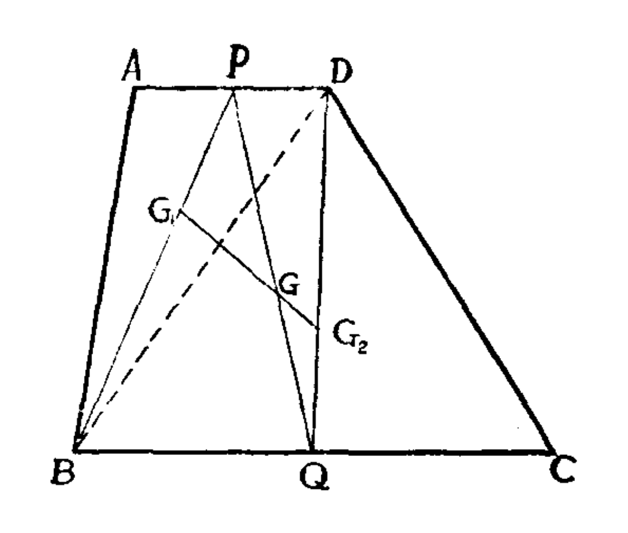



$AB$ 上点的特点（如左图），因此只要将这些点圆滑地连结起来，就可以得到大半径的圆弧了。

也许你会说，$y=\frac{x^2}{2R}$不就是一条抛物线吗？对了，在画很大半径的一段圆弧时，是可以用抛物线来近似地代替圆的。

## 怎样用简单的方法求出梯形重心？

在生产实践中，常常需要求出一些物体的重心。一般质量均匀、形体规则的物体的重心，就是它们的几何中心。例如：三角形（薄板）的重心，是在其中线的交点上；也就是说，重心与底边中点的距离，为该中线长度的三分之一。平行四边形的重心，是在其对角线的交点上。这些，大家都很熟悉的。但是，梯形的重心该怎样求呢？

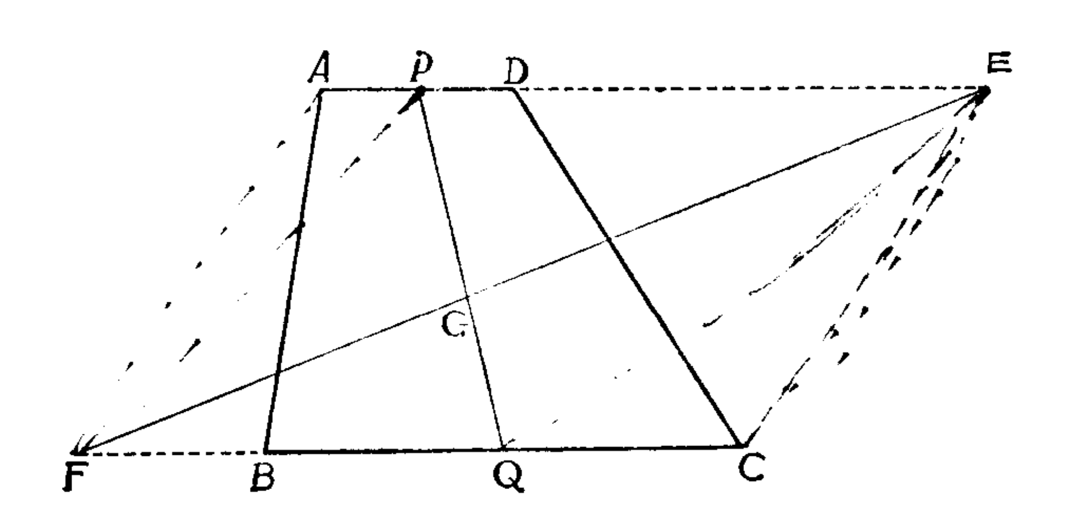



如图梯形 $ABCD$，我们把 $AD$ 的中点 $P$，和 $BC$ 的中点 $Q$ 连结起来，梯形的重心 $G$ 就应该在 $PQ$ 的连线上。但是究竟在线段

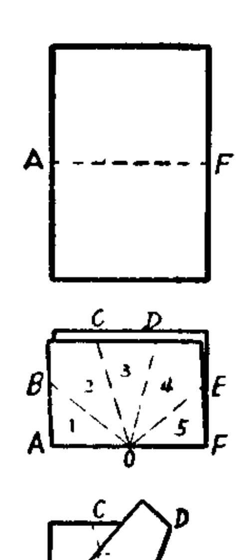
$FQ$ 上的哪一点呢？我们还不知道，还必须找出 $G$ 点所在的另一条直线。

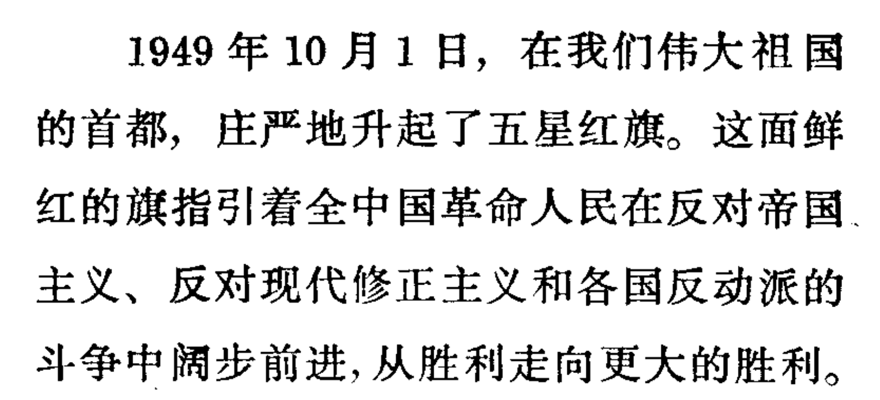
毛主席教导我们："**一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的**"。既然梯形是由两个三角形拼合而成的，那么就有可能把梯形的问题转化为三角形的问题，借助这两个三角形的重心，进一步去找出梯形的重心。为此，连结梯形的对角线 $BD$，把梯形分成两个三角形 $ABD$ 和 $BCD$，找出这两个三角形的重心 $G_1$ 和 $G_2$，再连结 $G_1G_2$；而梯形的重心 $G$ 又应该在线段 $G_1G_2$ 上，因此 $PQ$ 和 $G_1G_2$ 的交点 $G$ 就是梯形的重心。

工人同志们在实践中，又找到了求梯形 $ABCD$ 的重心的更为简便的方法。这就是，先把 $AD$ 延长到 $E$，使 $DE=BC$，把 $CB$ 延长到 $F$，使 $BF=AD$，连结 $EF$；再连结 $AD$ 的中点 $P$ 和 $BC$ 的中点 $Q$。那么，$EF$ 和 $PQ$ 的交点 $G$ 就是梯形的重心。关于它的证明，这里就不介绍了。



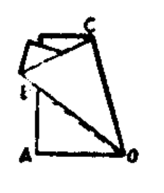
# 怎样剪纸，才能一刀剪出五角星来？



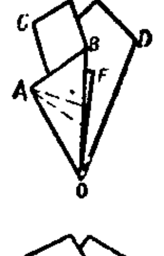


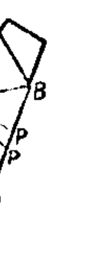
1949 年 10 月 1 日，在我们伟大祖国的首都，庄严地升起了五星红旗。这面鲜红的旗指引着全中国革命人民在反对帝国主义、反对现代修正主义和各国反动派的斗争中阔步前进，从胜利走向更大的胜利。

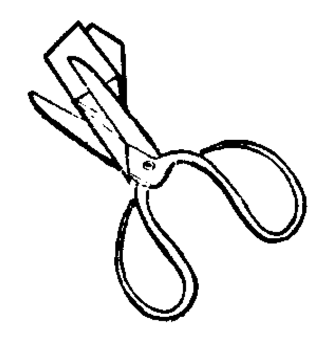
在我国人民的政治生活和文娱活动中，经常要用到五角星。如果利用一张长方形的、或是圆形的、甚至是不太规则的纸，你能把它一刀剪成五角星吗？

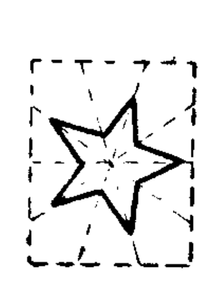


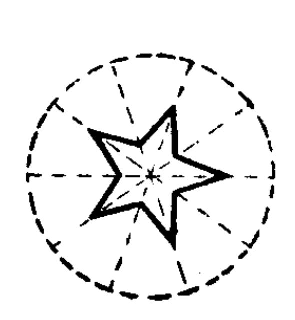
观察一般五角星的种种特性，我们发现：它的每两个相邻顶心距的夹角都相等，等于一个周角的十分之一，即 36°；它的每两条相间的顶心距都是等长的。根据这个道理，我们可以很容易地剪出五角星。但

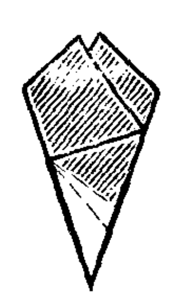
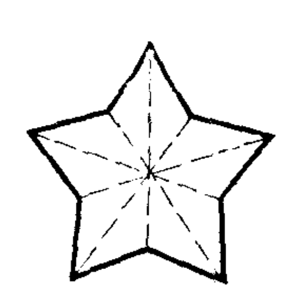
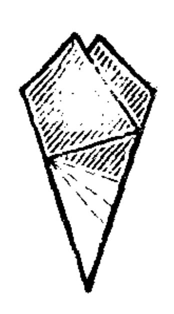
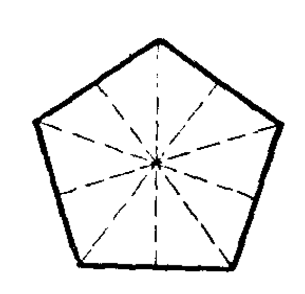










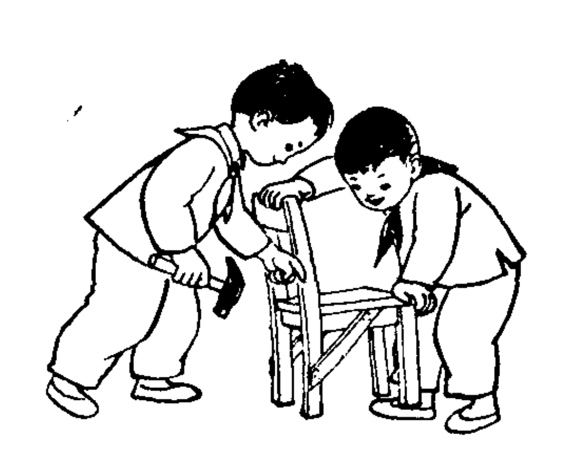
由于剪线的位置选择不同，剪得的五角星的形状也会随之不同。

不管是长方形或圆形的纸，只要先对折起来、然后再照前页图中的步骤，折成五等分，沿 $PA$ 线剪一刀，再把折纸展开，就成一个五角星了。

不过，有一点要注意，剪普通的五角星，一定要在五等分的折纸上，从相当于 $OA$ 边长三分之一强的地方（图上 $P$ 点）沿着斜线 $PA$（或是沿着平行 $PA$ 并和 $O$ 较近的斜线）剪开。如果由等于 $OA$ 二分之一的地方（图上 $P'$ 点）沿着 $P'A$ 斜线剪开，五只角就比较短，变成另一种五角星了，如上图左边的一个五角星。

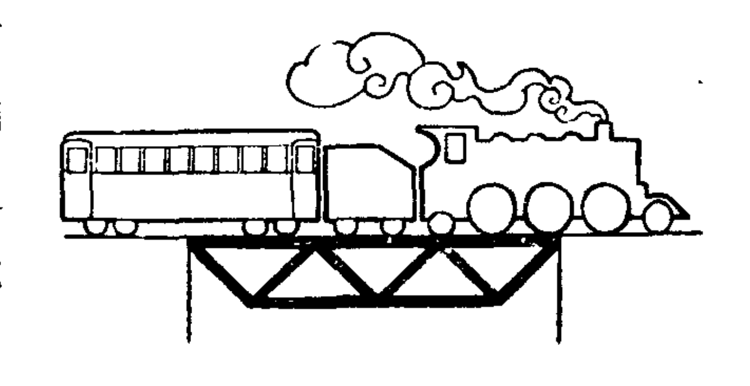
如果你把剪刀沿着折纸的直角剪去，你大概以为剪出的也是短角的五角星吧！不，五角星没有了，你剪出的却是一个正五边形了，如上图右边的一个图形。你想一想，这是为什么呢？

# 为什么桥梁或屋顶的支架往往构成三角形？



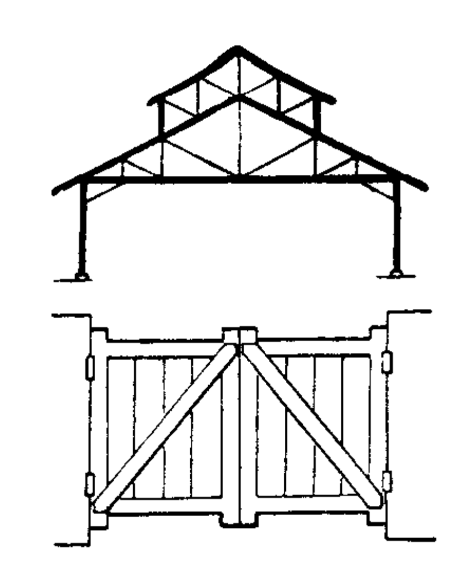
如果你坐的椅子或者凳子坏了，准备用几根木条固定一下，那么，该怎样钉法最牢固呢？

倘使你把木条顺着摇晃的凳脚钉去，那么，不要多长时间又摇动了。要是让它跟凳脚和座板相交并构成一个三角形，在接头的地方，钉上三枚铁钉，让它们也分布成三角形，这样修理之后，凳子就会相当牢固了。



为什么同样粗细的一根木条，顺着凳脚和斜着钉去会产生不同的效果呢？为什么用三枚钉子就足够了呢？原来这是因为三角形有一种特殊的性质：只要三边的长度确定了，三角形的形状、大小也就不能再改变。这种性质，我们叫做三角形的稳定性。

在建筑工业方面，对三角形的稳定性用得很多，如桥梁或屋顶常常用一个个三角形构成支架；许多栅栏门往往也斜着钉上一根木条，这样就比较稳定而且牢固。



从这里可以看出，几何知识在工农业生产和日常生活中是很有用的。我们学了一些数学知识后，必须注意它的应用，要多看、多想、多动手，这样才能理论联系实际，使数学为生产实际服务。

## 为什么铁拉篱轻轻一推就收拢了？

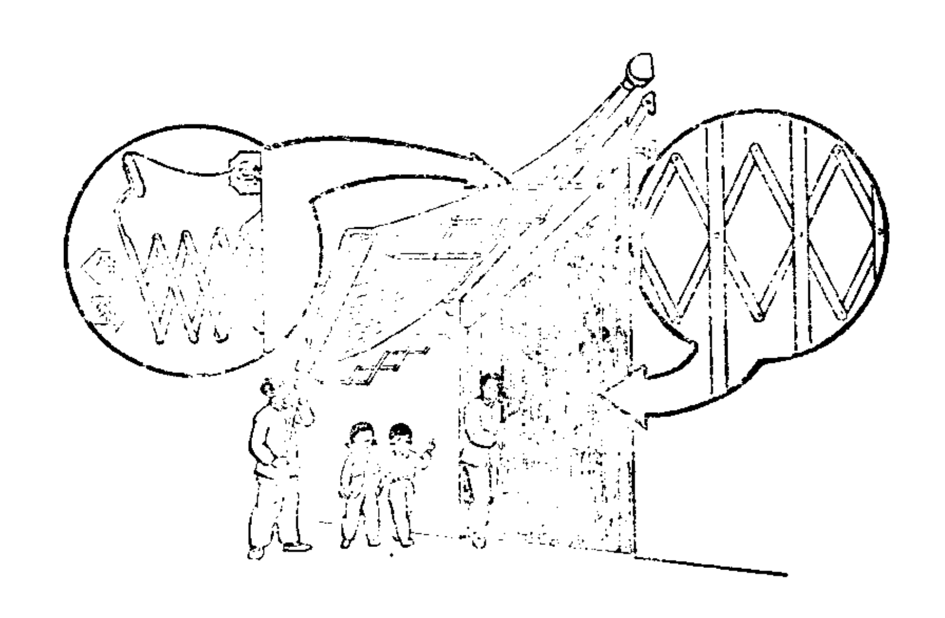
居住在城市里的小朋友，在上学或者回家的时候，如果留心一下，你一定能够发现，有些商店或建筑物的铁门，虽然很重，但是开关起来却非常轻便。

为什么一扇巨大的铁门，轻轻一推，它就被挤扁了，这样铁门就打开了？关的时候，拉起来也不需多大的力气，这是什么道理呢？

如果你仔细地观察一下这些铁门的构造，那就不难找到正确的回答。原来它们都是由一个个的菱形或者平行四边形组成的。

但是，为什么四端联接着的菱形或平行四边形可以自由伸缩？如果换成三角形行不行呢？

换成三角形是不行的。那样的话，铁门就无法开关了。



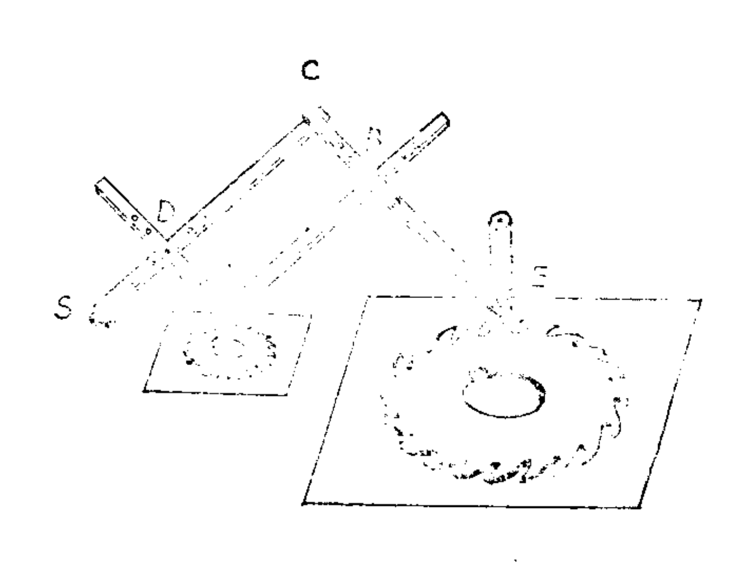
原来四边形具有与三角形不同的特殊的性质，四条边长一定的四边形，它的形状并不固定；四边形的这种性质，叫做四边形的不稳定性。一个方形的木框往往很容易损坏，火柴盒子不需多大的力气就能压扁，都正是由于这个缘故。

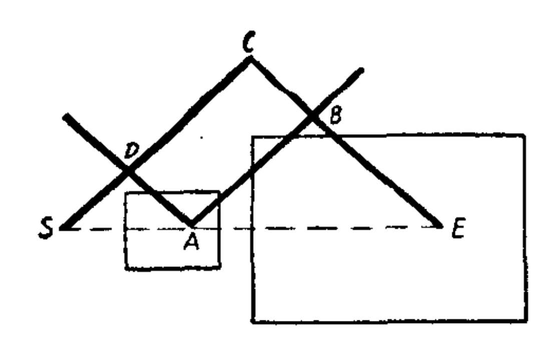
如果把四边形的不稳定性这种性质，合理地应用到生产实际中去，就可以做成能够推拉的铁门。此外，又如拖拉机、货车在机车和拖车连接的地方装上防护链，也采用平行四边形的结构，这样，便于机车转弯，保障行车安全。还有放缩器也是利用这个性质做成的。

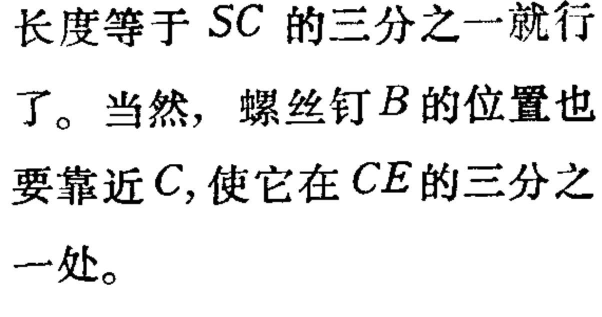
## 为什么放缩器能把图形放大或缩小？

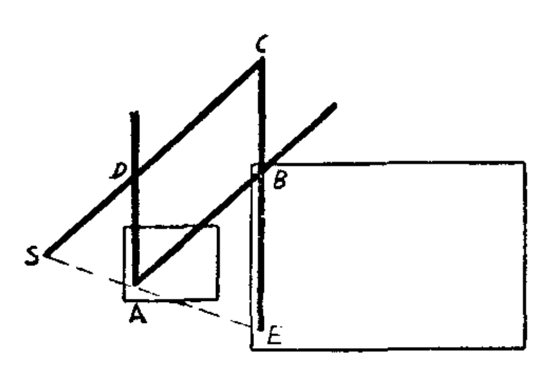
要把图形放大或缩小，而且不改变原来的形状，我们利用放缩器（或叫放缩尺），就可以很容易地办到。放缩器是用两两平行的四条直尺组成的。在 $A$、$B$、$C$、$D$ 处，都用螺旋钉活动地连接起来（如下页图示），组成一个平行四边形 $ABCD$。它的各边，都能够分别绕着顶点（有螺旋钉的地方）转动。

你想把图形放大，只要把放缩器的 $S$ 处固定起来，在 $A$ 处装上尖针，$E$ 处装上铅笔。这样，我们把 $A$ 处的尖针依照原有的图形描画，在 $E$ 处的铅笔就会自动地描出一个和原来相似的放大了的图形。反过来，如果要把图形缩小，你可以在 $E$ 处装上尖针，依照原有的图形描画，而在 $A$ 处装铅笔的下面，就描出了与原来图形相似的一个缩小了的图形。放缩器不但能够把图形放大或缩小，而且能够按照你所需要的倍数来放大或缩小。如果你要把图形放大三倍，只要把螺丝钉 $D$ 靠近 $S$，使 $SD$ 的

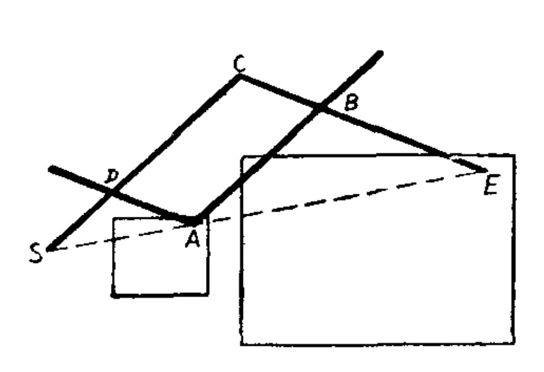






长度等于 $SC$ 的三分之一就行了。当然，螺丝钉 $B$ 的位置也要靠近 $C$，使它在 $CE$ 的三分之一处。




为什么放缩器有这样的本领呢？我们仔细地看一下放缩器吧：$SC$ 和 $CE$ 两尺一样长；$DS$ 和 $DA$（就是从 $D$ 处的螺丝钉到 $S$ 和 $A$ 处的距离）也要求保持同样的长度。




因为在等腰三角形 $SCE$ 中 $\angle CSE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$，而在等腰三角形 $SDA$ 中 $\angle DSA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle SDA)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$，所以 $SA$ 重合在 $SE$ 上，因此就使 $S$、$A$、$E$ 三点永远保持在一条直线上。$S$ 是固定的，$E$ 总是跟着 $A$ 跑（或 $A$ 跟着 $E$ 跑），所以 $S$、$A$、$E$ 仍旧在一条直线上。又 $SA$ 和 $SE$ 的比，等于 $SD$ 和 $SC$ 的比。如果 $SC$ 是 $SD$ 的 $k$ 倍，那么，$SE$ 一定也是 $SA$ 的 $k$ 倍，由此可见，$A$ 和 $E$ 的活动范围，比较起来，总是 $k$ 倍的关系。因此，放缩器就能够把图形放大或缩小 $k$ 倍了。

如果你想把图形缩小七倍，$S$ 固定后，螺丝钉 $D$ 和 $B$ 应

该放在什么地方？$A$和$E$，哪一处该装上尖针，哪一处该装上铅笔？你都能自己决定了吧！

放缩器的构造很简单，可以自制一个。用铅笔画出来的图形，仅是个草稿，然后再加加工就可以把它画得很好了。

工厂加工模具时，有时先要画出较大的图形，再利用放缩器把它缩小，这样可以使误差较小。

毛主席教导我们："**卑贱者最聪明！高贵者最愚蠢**"，加工模具的工人老师傅利用放缩尺，在装铅笔的地方直接装上一把切割的刀子，于是当针尖移动时，刀子就跟着把模具切割下来。这样就能使模具绘图和切割的过程结合在一起，从而减少了工序，提高了工作效率。

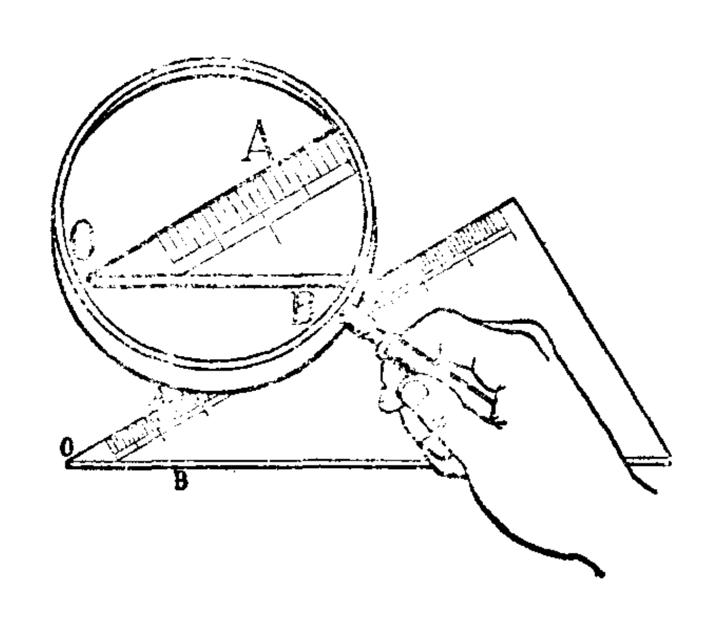
## 为什么放大镜不能把"角"放大？

我们看到老年人看报、读书，往往戴上老花眼镜，或者拿上一面放大镜。因为老花眼镜片和放大镜片都能把文字或图画放大，所以老年人用它。

放大镜的确可以把任何东西放大几倍、十几倍甚至几十倍。如果要放大几百、几千倍，甚至几万、几十万、几百万倍，还可以用光学显微镜或者电子显微镜。在工业生产和医学上显微镜有着重要的作用。在无产阶级文化大革命中，

我国工人阶级遵照毛主席“**中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平**”的教导，发扬敢说、敢干的首创精神，制造出具有世界先进水平的四十万倍电子显微镜，为社会主义革命和社会主义建设作出重大贡献。可是，不管放大镜还是光学显微镜、电子显微镜，虽然能把东西放大很多倍，但是有一件东西却无论如何也放大不了。你猜，这是什么东西呢？这就是几何学里面所用到的“角”。“角”的实用价值很大，测量和设计机器都要用到它。“角”是由一点所引两条射线组成的。譬如 $\angle AOB$，就是由两条射线 $OA$ 和 $OB$ 组成的。“角”的大小，是指同一点所引两条射线张开的程度。我们已经知道一个角的大小是用几度、几分、几秒来表示的。

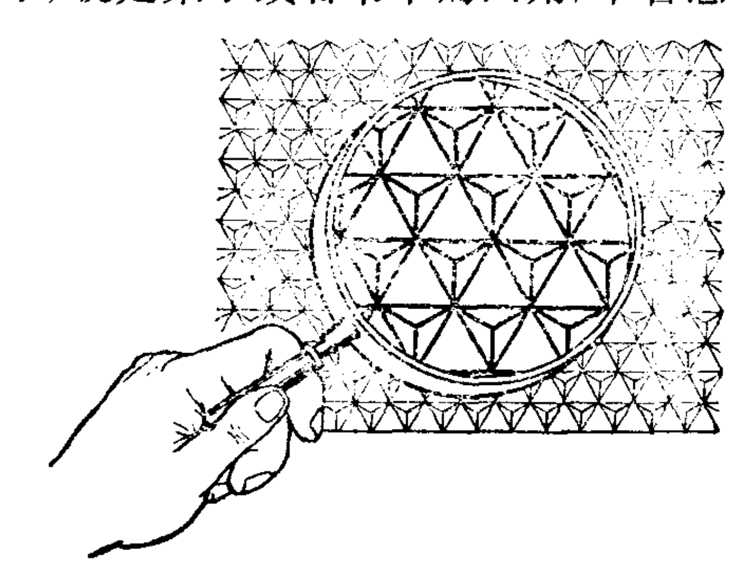
例如，左图中的“角”是 30°，在放大镜下面看起来，它还是 30°。虽然放大镜把画面上的射线和字母都放大了，可是这个角张开的程度，还是没有改变。




为什么呢？因为经过放大后这两条射线的位置，总是不变的。$OB$ 占有水平的位置，放大后仍旧占着水平的位置；$OA$ 原来是这么斜

着的，放大后它还是这么斜着。放大镜只能把东西的各部分成比例地放大，而且形状不变。在数学上，原来的图形与放大后的图形称为相似形，相似形的对应角是相等的。因此，放大镜下的$\angle AOB$，与画面上的$\angle AOB$，在大小上是相等的，并没有被放大。

最明显不过的例子，就是桌子或者书本的四角，不管怎么放大，它们的四个角仍旧都是直角。因此可以说，随便多少度数的角，“放大”以后度数是不改变的；也就是说，“角”是不会被放大镜放大的。

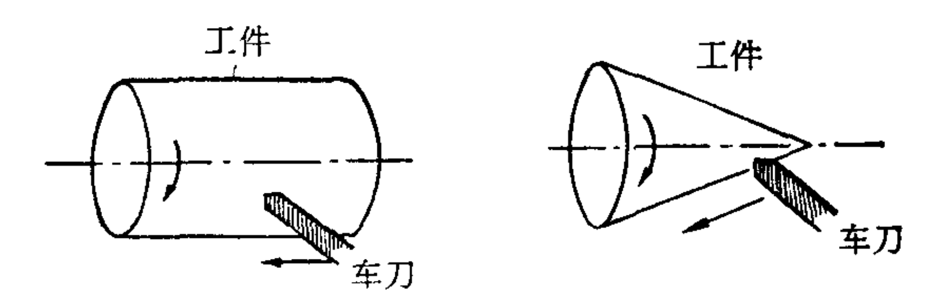


## 为什么车床可以加工椭圆柱面？

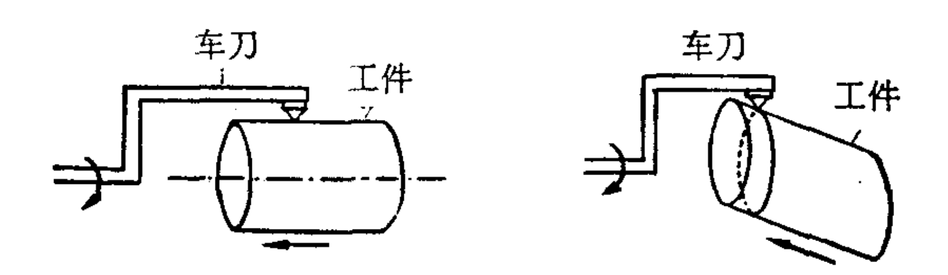
车床一般是用来加工圆柱形工件的。由于生产上特殊需要，有时也要加工一些其它形状的工件，如椭圆柱等。这时候如果没有专用机床，怎么办呢？工人师傅在遇到这种情况时，不是先考虑增加设备，而是动脑筋，想办法，在现有的车床上加以改革，制造出所需形状的工件来。

一般车床在工作时，总是工件转动，车刀移动。如果车

刀平行于工件的转动轴移动，就车得一圆柱面，如下面的左图。如果车刀移动方向与工件的转动轴有一交角，或作其他方式移动，那就可得一圆锥面或其他形状的旋转面，如下面的右图。但是无论如何不能得到椭圆柱面。

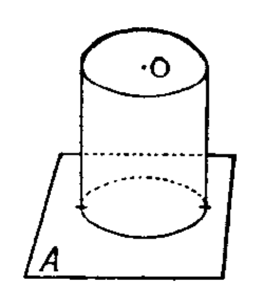


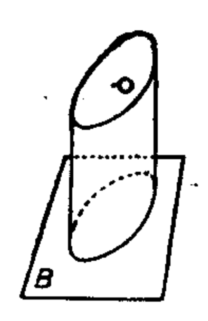

工人师傅将车床改装一下，使车刀转动，工件移动。如果工件移动方向与车刀转动轴平行，仍然得到一圆柱面（如下面的左图）。如果工件移动方向与车刀转动轴有一夹角的话（如下面的右图），那情况就不同了。这时所得到的曲面，就是以车刀刃口转出的一个以圆为基准线，以一平行于工件移动方向的直线为母线，沿着上述的圆移动一周所画出的柱面，把它竖起来就如下页图所示。底面上的圆$O$就是车刀刃口转出的圆。




象下页左图所示的柱面，若用平行于底面的平面$A$去截它，截口都是与圆$O$同样大小的圆；如果用与母线垂直的

平面$B$去截它的话，在截面$B$上得到的图形，就象阳光照射在一个斜着的圆$O$上的影子，是一个被压扁了的圆，这就是一个椭圆。因此，按上页的右图所示的方法加工得的柱面，是一个椭圆柱面。





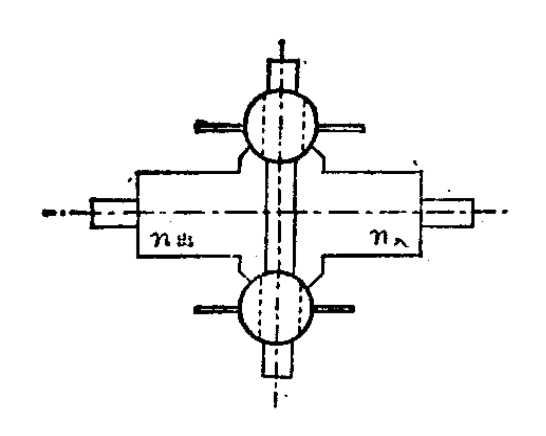

椭圆柱面的形状，是由工件运动方向与车刀转动轴的夹角决定的；这个交角越大，椭圆柱就越扁。因此，只要我们适当选定工件运动方向与车刀转动轴的夹角，就可以得到各种所需形状的椭圆柱面了。

## 车床能无级变速吗？

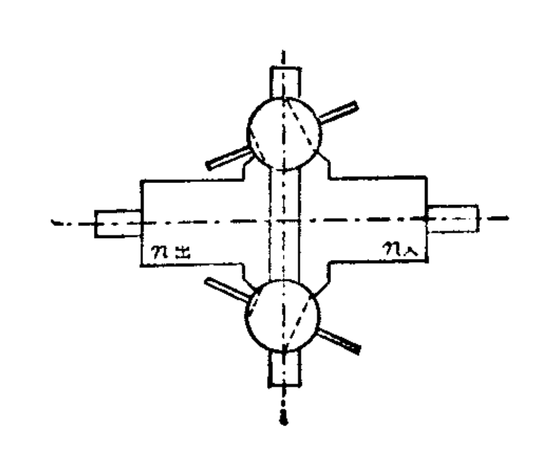
车床要改变速度，一般是用皮带或齿轮来实现的。这种改变，总是分若干种速度级别的。随着生产的发展，对机床的要求也愈来愈高，如要求能连续的无级变速。

上海某机械厂的工人，在毛主席**“自力更生”**、**“艰苦奋斗”**、**“破除迷信，解放思想”**的光辉指示下，发扬了敢想、敢说、敢干的革命精神，自行设计、制造成功了钢球无级变速车床。

这台车床是怎样用钢球来调速的呢？它的主要部分即无级变速器由六个大小一样的钢球，均匀有空隙的排列在

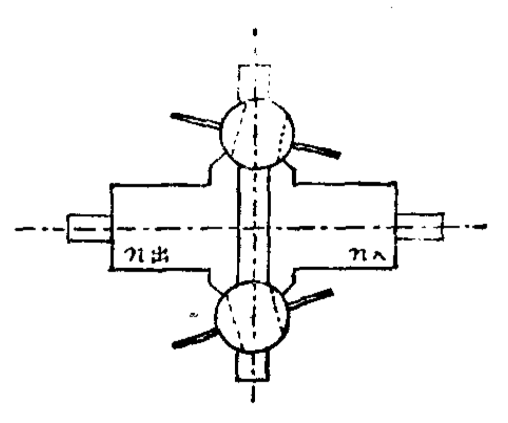



一个圆周上，每个钢球都有一个旋转轴，能同时改变轴的倾斜角度而变速，从而得到无级变速。钢球的两侧都有与球紧密接触的同样大小的传动盘。如以 $n_入$ 表示输入转盘，即主动传动盘；以 $n_出$ 表示输出转盘，即被动传动盘。当主动传动盘 $n_入$ 由电动机带动旋转时，由于钢球与主动传动盘紧紧接触，$n_入$ 靠摩擦力也就带动六个钢球同时旋转；再由于钢球的旋转而带动输出传动盘 $n_出$ 旋转。因此钢球实际上起了一般车床中传动齿轮的作用。如上图所示，当钢球的旋转轴与水平方向平行时，被动传动盘 $n_出$ 的旋转速度与 $n_入$ 一致。当改变钢球的旋转轴时，就改变 $n_出$ 的旋转速度。如下图所示，车床转动时，主动传动盘 $n_入$ 在钢球上的接触圆半径增大，相当于 $n_入$ 带动一个半径较大的齿轮，故 $n_入$ 带动钢球旋转的速度变慢，而此时钢球与 $n_出$ 在钢球上的接触圆的半径缩小，此时旋转的钢球又只起了一个小齿轮去带动 $n_出$ 的作用，所以 $n_出$ 的转动速度变慢。右图表示降速的情况。下页图表示升速的情况。




$n_入$ 的转动是由电动机所带动，是恒速的。这样钢球旋

转轴的改变就使 $n_{出}$ 的转速改变，而 $n_{出}$ 是带动车床主轴转动的，故 $n_{出}$ 转速的改变，就使车床主轴的转速也随着改变。再利用钢球旋转轴的改变可以连续的变化，这样就使车床主轴的速度也可连续的变化，就成为无级变速了。

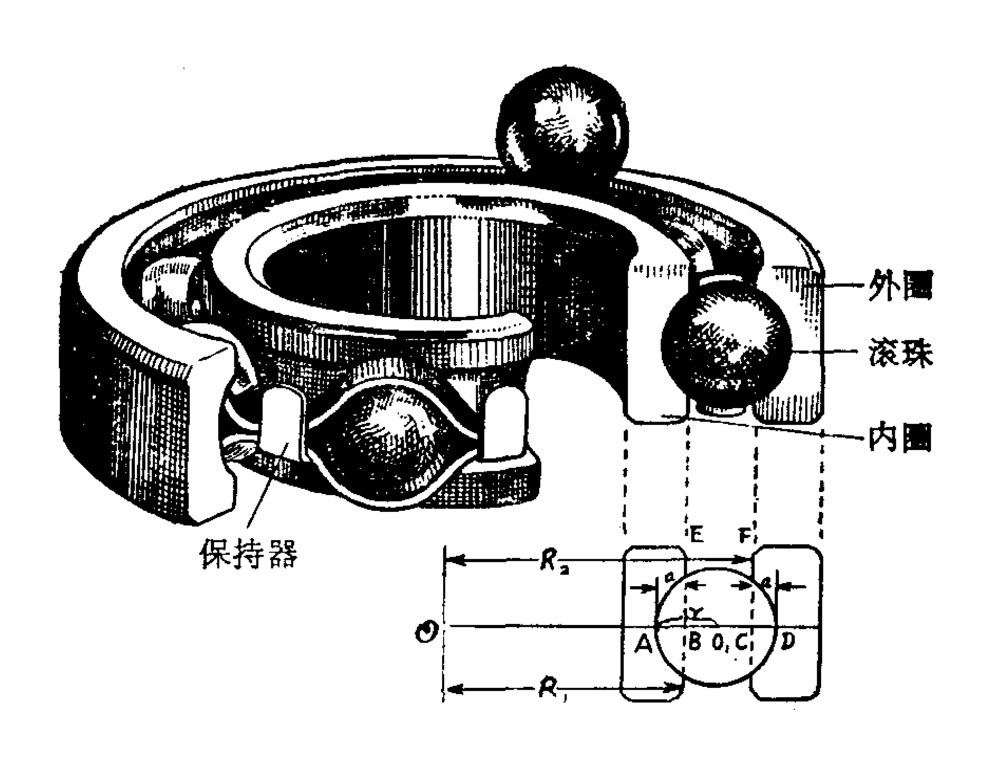



无级变速车床的优点，是可以选择最有利的切削速度，提高生产力，提高加工精度，延长刀具使用寿命。

## 怎样计算一只轴承里最多能放几颗滚珠？

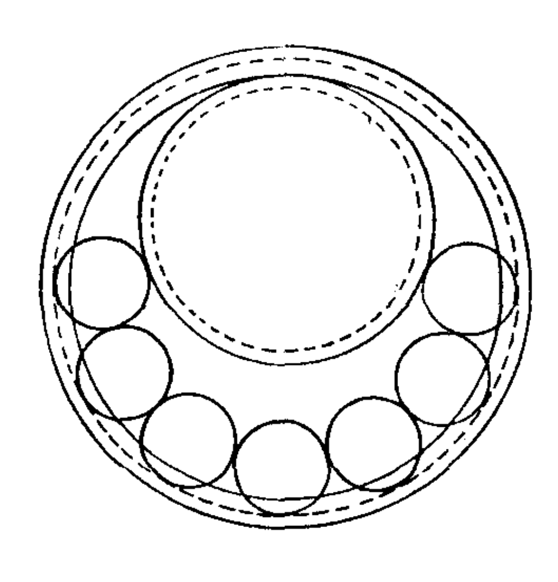
滚珠轴承（俗称弹子盘）是工农业生产上常用的机械配件，它的摩擦阻力小，用途非常广泛，如电动机、航空发动机、机床齿轮箱、汽车和拖拉机的变速箱，以及各种仪器、仪表等等中都要用到它。因此轴承的生产，也标志着一个国家的工农业和国防工业的生产水平。

滚珠轴承是由外圈、内圈、滚珠和保持器四个部分组成的。内圈的外层和外圈的内层各有一个沟槽，滚珠就放在内外圈的沟槽之间，两边的沟槽正好把滚珠卡住，使它掉不




出来。如果要想把滚珠直接从上边放进沟槽里（如上图），那是无论如何也放不进去的。那么，这些滚珠究竟是怎样装进去的呢？

工人老师傅创造了一种很好的方法，在放滚珠时，先把内圈放进外圈里，并把内圈推到最上边（如下图，其中虚线表示内外圈的沟槽），空出下边的地位，这样就可以把滚珠逐个放进去了。把所有该放的滚珠都放进去以后，再加以调节，使内圈回复到中心位置，滚珠均匀地分布在内外圈之间，最后加上保持器就行了。



当然，轴承里放的滚珠越多越好，滚珠越多，轴承能承受

的力就越大，也就是说每一颗滚珠所受的力就越小，因此我们希望尽可能地多放几颗。但是，能放进去的滚珠毕竟是有限的，如果滚珠太多，圈内没有丝毫余地，内圈就无法调节到中心位置上了。那么，究竟最多能放进几颗呢？

根据工人老师傅放滚珠的经验，当我们在空出的下边，逐个把滚珠放进来，一直放到左右两端最上方的两个滚珠圆心 $O_1$、$O_2$ 与 $O$ 在一条直线上为止，那么，这时候所放的滚珠数目就是最多的了。否则就无法把内圈推回到与圆 $O$ 同心的位置。

如果 $OA$、$OB$ 分别为从 $O$ 到 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的切线，则

$$x = \angle AOB,$$

这就是能放滚珠的最大限度的角，它称为轴承的填球角。

现在我们从数学上来计算，一个轴承里最多能放进多少滚珠？

首先我们来确定滚珠的直径 $2r$ 应该是多少？

我们再看第200页的图示，假设轴承的内圈外径为 $R_1$，外圈的内径为 $R_2$，沟深都是 $a$，滚珠的半径为 $r$，通过某一滚珠的球心 $O_1$ 及内外圈的共同中心 $O$，作轴承的纵截面，就可以看出滚珠的直径是

$$2r = EF + 2a = R_2 - R_1 + 2a。\qquad (1)$$

因为两圆相切，联心线一定通过切点，所以在上页图$\triangle OAO_1$中，

$$OO_1=R_1-a+r$$

$$=R_2+a-r$$

$$=\frac{1}{2}[(R_1-a+r)+(R_2+a-r)]$$

$$=\frac{R_1+R_2}{2}。$$

由于 $O_1A=r$

$\angle OAO_1=90°$ （∵ 切线垂直于过切点的半径）

于是得到

$$\sin y=\frac{O_1A}{OO_1}=\frac{r}{\frac{R_1+R_2}{2}}=\frac{2r}{R_1+R_2}。$$

比较$x$与$y$，得到

$$x=180°+2y。\tag{2}$$

因为每放进一颗滚珠，就产生一个圆心角$2y$，所以只要计算$x$中有几个$2y$，就可以求出能放进的滚珠的最大颗数($n$)了，即

$$n=\left[\frac{x}{2y}\right] \qquad \left(\left[\frac{x}{2y}\right]表示\frac{x}{2y}的整数部分\right)$$

$$=\left[\frac{180°+2y}{2y}\right]$$

$$=\left[\frac{90^\circ+y}{y}\right]$$

$$=\left[\frac{90^\circ}{y}\right]+1。\qquad (3)$$

例如：假设有一个滚珠轴承，它的内圈的外径 $R_1=7.175\text{mm}$，外圈的内径 $R_2=10.325\text{mm}$，沟深 $a=0.675\text{mm}$，这只轴承里最多能放进几颗滚珠？

将 $R_2$、$R_1$、$a$ 的数值代入(1)式，得

$$2r=10.325-7.175+2\times0.675=4.5(\text{mm})。$$

$$\sin y=\frac{2r}{R_1+R_2}=\frac{2\times2.25}{7.175+10.325}$$

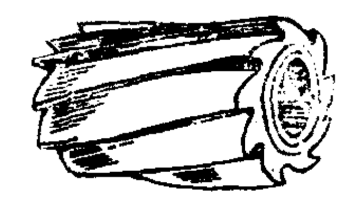
$$=\frac{4.5}{17.5}\approx0.25714。$$

查表得　$y\approx14^\circ54'$。

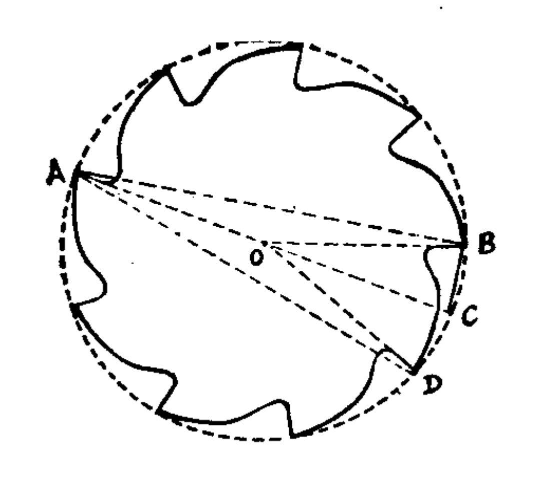
$$n=\left[\frac{90^\circ}{14^\circ54'}\right]+1=6+1=7。$$

所以这只轴承里最多只能放进 7 颗滚珠。

## 怎样测量奇数齿铣刀的外径？



工业生产实践中在加工平面、制造齿轮、开槽子等切削加工时常常使用铣床。铣床上使用的铣刀有立铣、盘铣等，下页图所示，就是盘铣的正面图。




使用盘铣时，必须要知道它的外径的大小。对于偶数齿的铣刀，我们可以直接用卡尺量得其相对两齿齿顶的距离，这也就是外径。然而对于奇数齿的铣刀的外径，怎么测量呢？

工人师傅在生产斗争中积累了大量实践经验，只要用卡尺量得两个齿顶间的最大距离 $AB$，就能很快地算得铣刀外径 $d$ 的大小了。

如图，假设铣刀的中心为 $O$，连结 $AB$，$AD$，$AO$，又延长 $AO$ 与铣刀的外接圆交于 $C$。并连结 $OB$，$BC$，$OD$。由于 $AC$ 是直径，故 $\angle ABC$ 为直角。又

$$\angle COB=\angle OAB+\angle OBA$$

（∵ 三角形外角等于两内对角的和）

且由于 $OA=OB$，故 $\triangle AOB$ 为等腰三角形，从而

$$\angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}\angle COB$$

因铣刀各齿的外形是相同的，故 $\angle COB$ 与 $\angle COD$ 必相等。所以

$$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOD$$

若铣刀齿数为 $z$，则有

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{4}\angle BOD=\frac{1}{4}\cdot\frac{360^\circ}{z}=\frac{90^\circ}{z}。$$

所以

$$AB=AC\cdot\cos\angle BAC=d\cdot\cos\frac{90^\circ}{z}.$$

从而有

$$d=\frac{AB}{\cos\frac{90^\circ}{z}}。$$

利用这个公式，知道了 $AB$，就可以很快地算得外径 $d$ 了。

## 为什么工厂检验产品，采用抽样检验的方法？

我们社会主义企业，每生产一批产品，必须对使用单位或消费者负责，因此产品出厂以前，都要进行检验，以保证质量。当然，最好是对每个产品都检验，才能保证出厂的产品中不致混进废品或次品，但对于现代工业生产来说，由于产品数量很大，全面检验要耗费很多人力物力；更伤脑筋的是，有些产品的检验过程是破坏性的。例如，试验某种合金钢钢丝的拉力强度，就要加力直到把它拉断为止；试验一种灯泡的寿命究竟有多长，就要把它点起来直到烧坏为止。象这种情况，当然更不容许全面检验了。因此人们就想能不能抽其中一部分产品检验来代替全面检验呢？实际情况告

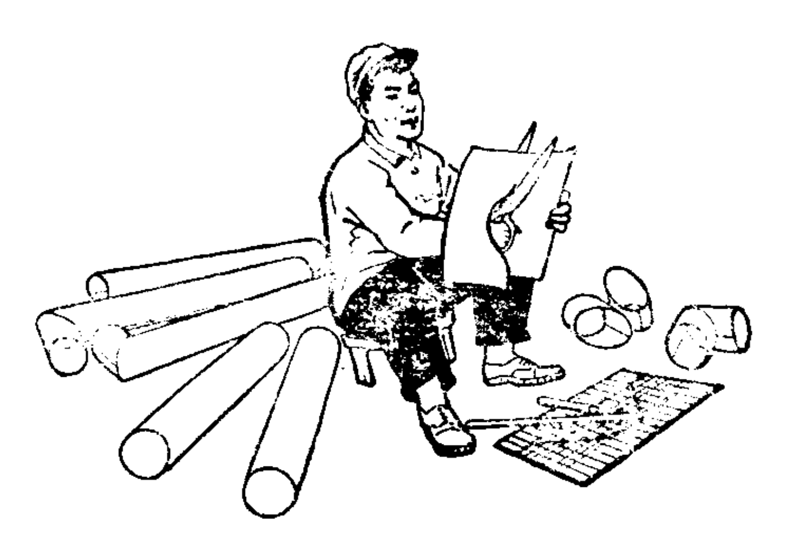
诉我们，这是允许的。这就是“抽样检验”的方法。因为对每一批产品来说，它们的生产条件基本上是相同的，所以只要这一部分产品是从整批产品中随便抽出来的，而不是按照某些条件拣出来的，它的质量情况，总能在一定程度上代表整批产品的质量情况。比如，抽验了100只产品，结果一个次品也没有发现，那么，虽然还不能保证在整批产品中也是一个次品也没有，但总可相信，这批产品的次品率是不大会高的，比如次品率高于2%的可能性就很小很小。当然，抽验的数量愈大，可靠性也愈大，但另一方面产品检验得愈多，耗费就愈大。

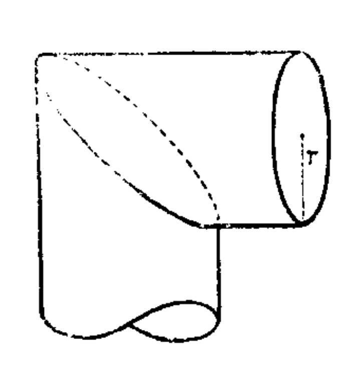
有的时候，改进了抽查的方法(如分几次抽查)，虽然检验数量减少了，但仍可达到同样的可靠程度。如何根据产品的各种情况及对它的质量要求，来确定抽验的数量和方法，以达到最最经济节约的目的，这是现代的数理统计研究中的一个问题。

## 90度的弯头应该怎样落料?

在日常生活和生产中，往往要用铁皮做一些90度弯头(又叫八字弯头)的管子。如冬天装在火炉上的通气管，工厂车间的通风设备等都少不了这种管子。你可知道这种弯头管子该怎样落料?

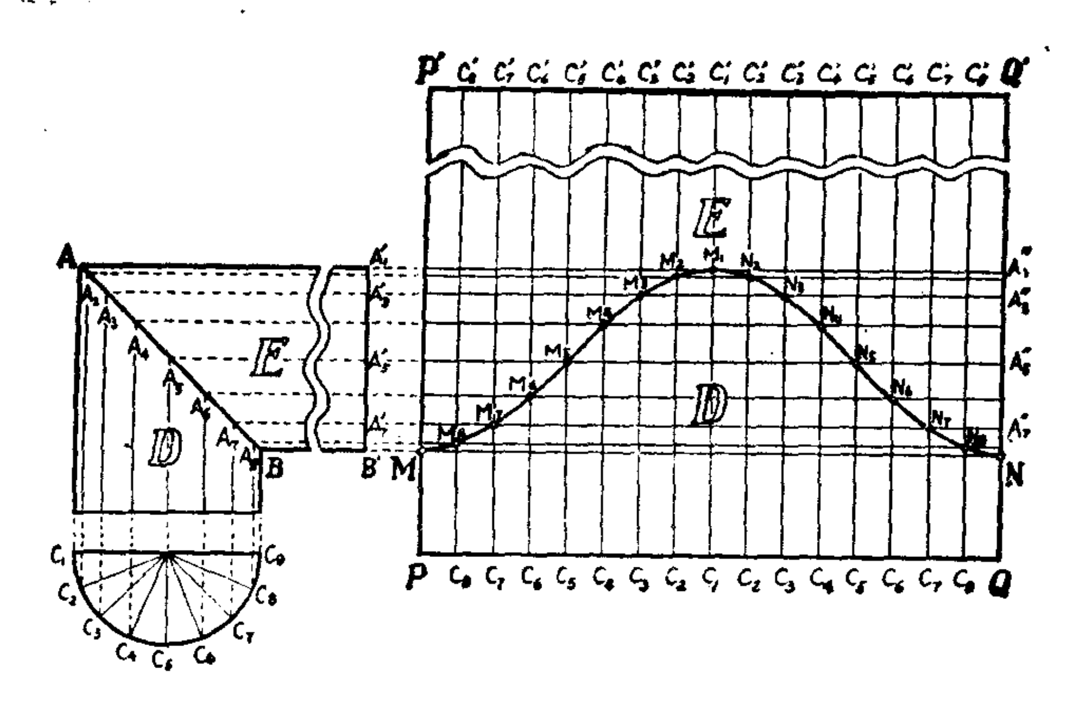
看来一根普通的弯头管子，这里面却包含着一定的数学知识，否则你剪下来的铁皮不是这里多出一块，就是那里缺掉一点，既不准确，又浪费材料。






在生产实践中，工人老师傅贯彻毛主席关于“**要节约闹革命**”的教导，为了准确地落料，常用展开落料法中的十七道线（或十三道线）的方法。这种落料方法不但准确，而且可以充分地利用材料。现在我们看看十七道线的方法是怎样进行落料的。

如果要做一个 90 度的弯头管子，它的半径为 $r$。那么，可以先画个半径为 $r$ 的 $D$ 管和 $E$ 管交成直角，得到它们的截口交线 $AB$。在 $D$ 管的下端画一个与 $D$ 管半径相同的半圆，把半圆分成 8 等分，过分点 $C_2$、$C_3$、$C_4$……$C_8$ 作垂直于水平方向的直线交 $AB$ 于 $A_2$、$A_3$、$A_4$……$A_8$ 7 个分点，从这 7 个分点作水平方向的平行线 $A_2A_2'$、$A_3A_3'$、$A_4A_4'$……$A_8A'_8$，再把 $A_1'A_1''$、$A_2'A_2''$、$A_3'A_3''$……$B'N$ 等平行线作在铁皮 $P'PQQ'$ 上，$PQ$ 的长度等于 $2\pi r$，再把 $PQ$ 分成 16 等分；经过分点 $C_8$、$C_7$、$C_6$……$C_8$ 作垂直于水平方向的平行线



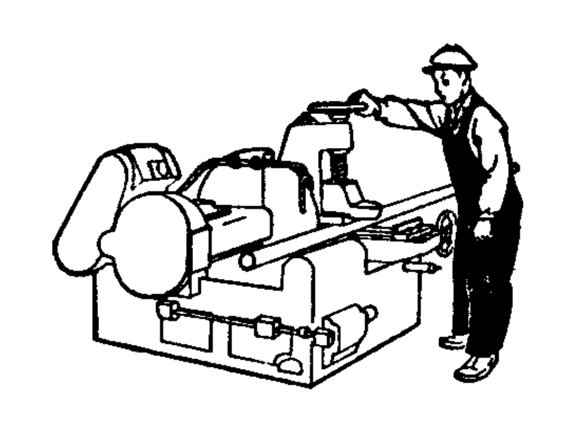

$C_8C_8'$、$C_7C_7'$、$C_6C_6'$……$C_8C_8'$，再把这两组平行线的有关交点 $M$、$M_8$、$M_7$……$N_7$、$N_8$、$N$ 用光滑曲线连结起来，就得到一根正弦曲线 $MN$。按照曲线 $MN$ 剪开，把 $D$、$E$ 两块铁皮分别焊接起来，就得到一根 90 度的弯头管子。

用类似的方法，还可以做出其它各种度数的转弯管子，如 60 度、70 度、120 度等等，不过这些管子的 $D$、$E$ 交线 $AB$ 与水平方向所成的交角就不是 45 度。用同样的方法还可以得出三节或多节圆管的落料方法。

## 用什么方法落料最节约原材料？

在工业生产中一方面要千方百计地增产，另一方面又要注意点滴的节约。因为如能在生产中节约一吨钢材，也就等于为国家增产了一吨钢材。实际上，在节约原材料方

面确实有很大的潜力。这里就讲一个如何利用数学计算以进行合理下料的例子。有个工厂要制造某种机器 120 台，每台机器需要三根粗细一样而长度分别为 58 厘米、40 厘米、32 厘米（加工余量已计算在内）的轴。造这些轴的原料是长为 150 厘米的圆钢。你看用什么方法落料，所用的原料为最少？



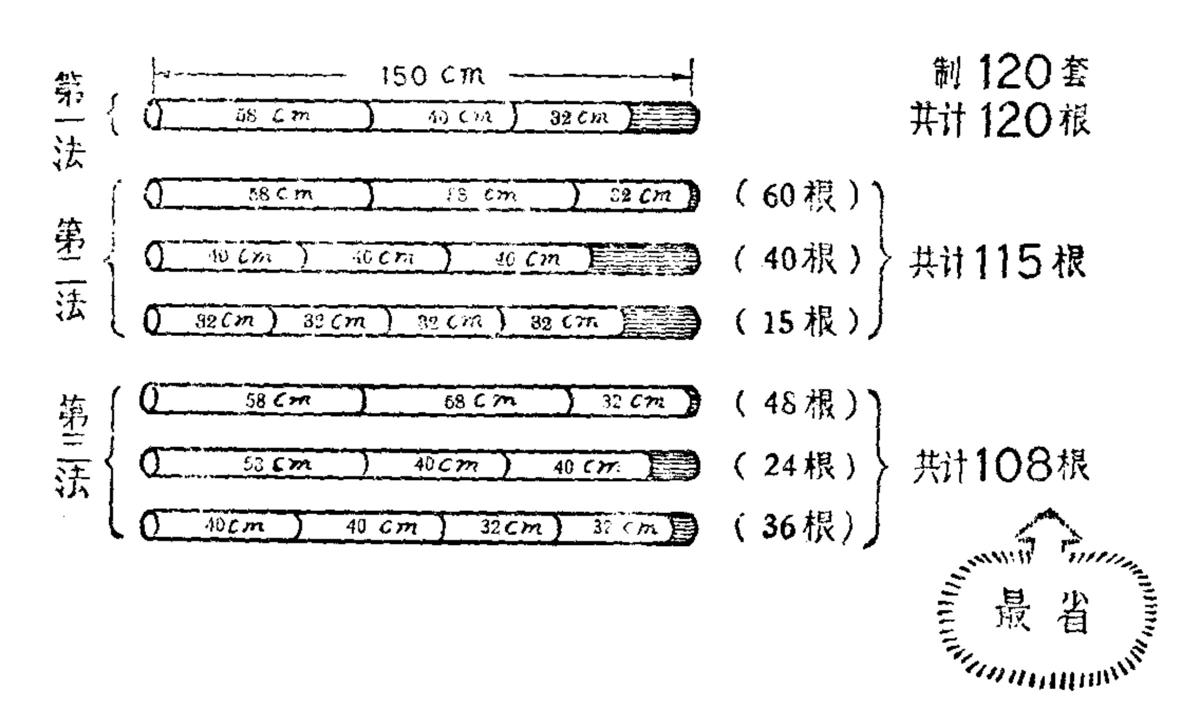
第一种最简单的落料方法是：在每根圆钢上截取一套，即三种轴每种各一根，这样截去了 58＋40＋32＝130（厘米），还有残料 150－130＝20（厘米）。这样制造 120 台机器就要用掉圆钢 120 根。

第二种方法：先在每根圆钢上截取两根 58 厘米的轴，余下 34 厘米可截一根 32 厘米的轴，用这种截法截了 60 根原料后可得 58 厘米的轴 120 根，32 厘米的轴 60 根，这时 58 厘米的轴已经足够了。再在每根圆钢上截取 40 厘米的轴 3 根，用去 40 根原料后可得到这种轴 120 根，这时 40 厘米的轴也够用了。最后在每根圆钢上截取 32 厘米的轴 4 根。用去 15 根原料后就能得这种轴 60 根，连同上面已经截得的 60 根，一共是 120 根。这样，就得到了三种轴各 120 根，而总共用去原料 60＋40＋15＝115（根），比第一种方法节省了 5 根。

第三种方法：先在每根圆钢上截取两根 58 厘米的轴和一根 32 厘米的轴，用去 48 根原料后得 58 厘米的轴 96 根，32 厘米的轴 48 根；再在每根圆钢上截取 58 厘米的轴一根，40 厘米的轴两根，用去了 24 根原料后得 58 厘米的轴 24 根，40 厘米的轴 48 根；这时 58 厘米的轴已经足够，而其它两种轴都还缺 72 根；最后，在每根圆钢上截取 40 厘米、32 厘米的轴各两根，用去 36 根原料后得这两种轴各 72 根。这样，总起来得到三种轴各 120 根，而总共用去的原料为 $48+24+36=108$（根），比第一种方法节约了 12 根，即节约了 10%。

事实证明，第三种方法是一种最节约原材料的下料方法。

为什么第三种方法比前两种方法都要优越呢？这是因

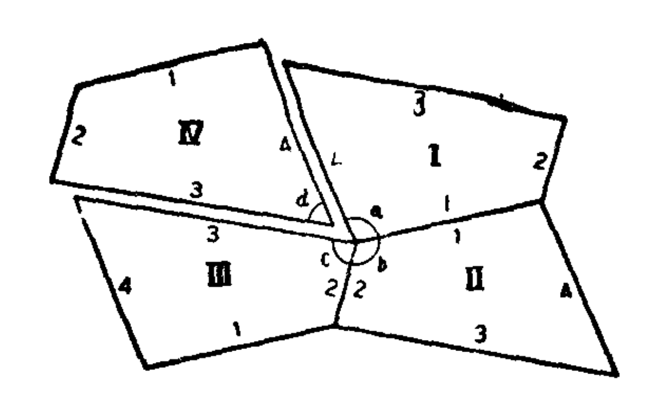


为，第一种方法中只考虑了三种轴每种一根配成一套的要求，它是一套一套地截取，结果使每根原料上截下来的残料很多（20 厘米），实际上也就浪费了原材料；第二种方法里虽然也考虑到截的时候把不同的轴搭配起来，以求减少残料，但它还缺乏科学的全盘的考虑，而只求每种轴凑满 120 根；而第三种方法是经过了全盘考虑，精打细算后得出的，它既考虑到每种轴都要截满 120 根，又要求截下来的残料的总和为最少。当然，这个方法不是硬凑出来的，而是有一定的计算过程的。这个计算过程是“线性规划”的任务。

## 为什么用相等的任意四边形的废木料也能铺地板？

毛主席教导我们：“**阶级斗争、生产斗争和科学实验，是建设社会主义强大国家的三项伟大革命运动**”，并且还向我们指出：“**读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。**”

当我们学过一条数学定理，不仅要把它弄懂、做几道练习题就算数了，更重要的是应随时注意把它与生产实践和日常生活紧密地联系起来，把它应用到三大革命运动中去，为社会主义革命和社会主义建设服务。



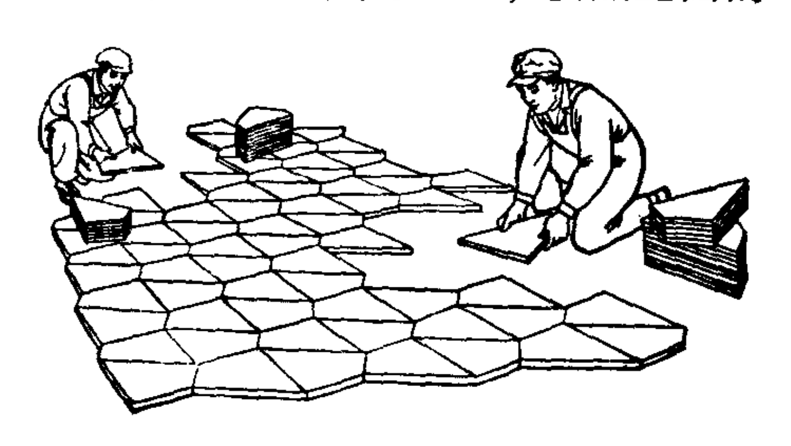

有些数学知识，看起来浅得很，例如："任意凸四边形内角之和等于 360°"。这一条定理在生产实践和日常生活中，有什么用呢？

有一次，在上海郊区某一人民公社的木器加工厂的废料堆里，堆放着大量四边形木块，这些剩料的大小和形状是一样的，但它们既不是正方形，也不是长方形，都是歪七歪八的四边形。

如果把它们做成比较规则的形状，必须锯掉一些边角，就要浪费很多木料。木器加工厂工人同志想到毛主席关于**"要进一步节约闹革命"**的伟大教导，觉得必须开动脑筋，充分利用这些木料。

后来，工人同志决定用这些木板来铺地板。而且任何大小的地板都可以用它来铺，只不过在两头的突出部分再加加工就行了。

为什么呢？因为四边形内角之和是 360°，按照上图的拼法，就能填满整个平面，而毫无隙缝。



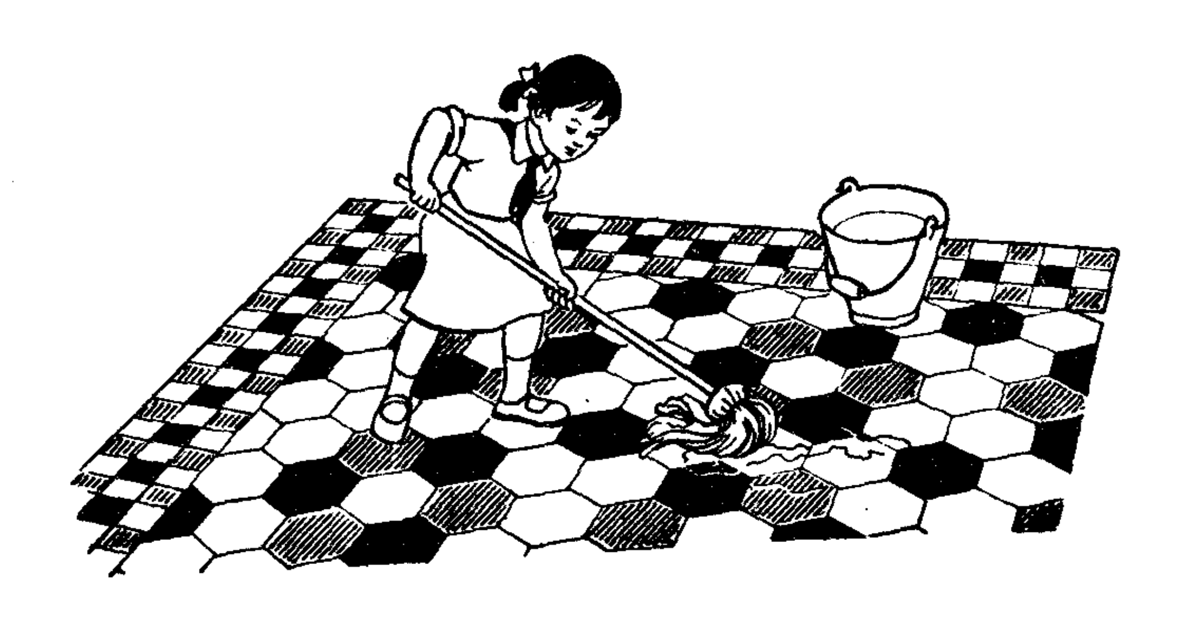
照这样子反复地排列下去，用这

些木板可以铺成极长的带形；当然，也可以把木板向另外两方面排列，把它拼成宽阔的一大块。

因此，凡是有着同样大小、同样形状的任意四边形木块，都可用来拼地板。

但是，在艺术设计上，为了美观起见，要使砖形具有对称性，一般铺地的美术砖，大都是用正方形或正六边形的，这是什么缘故呢？

在正多边形中，只有三种能用来铺满一个平面，而中间没有空隙，这就是正三角形、正方形和正六边形。因为正三角形的一个角等于60°，六个正三角形拼在一起时，在公共顶点上的六个角之和等于360°。正方形的一个角等于90°，所以四个正方形拼在一起时，在公共顶点上的四个角之和刚刚等于360°。而正六边形的一个角等于120°，所以三个

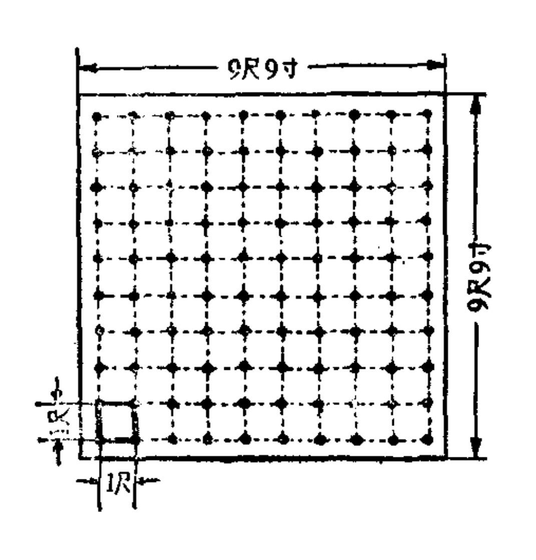


正六边形拼在一起时，在公共顶点上的三个角之和也是等于 360°。

如果用别的正多边形，就不能达到这一要求。例如正五边形的一只角等于 108°，把三个正五边形拼在一起，在公共点上的三个角的和是 $3\times108^\circ=324^\circ$，小于 360°，有空隙。而空隙处又放不下第四个正五边形，因为 $4\times108^\circ=432^\circ$，大于 360°。

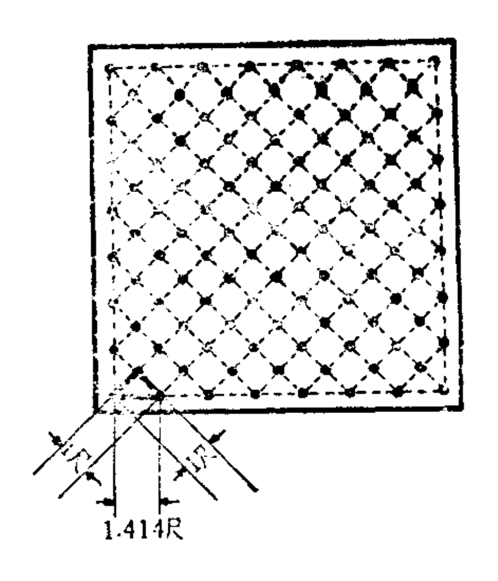
六个正三角形拼在一起，虽然没有空隙，但是它不及正方形和正六边形好看。所以在艺术设计上，一般用正方形和正六边形的美术砖较多。

## 为什么按正三角形种植树苗，能够种得最多？




某人民公社有一块 9 尺 9 寸见方的苗圃，根据经验，相邻两株之间的距离为 1 尺，比较合适。这样，这块苗圃就只能种上 10 行，每行 10 株，共 100 株。每相邻两株之间的距离都是 1 尺(如左图)，因为 10 株只

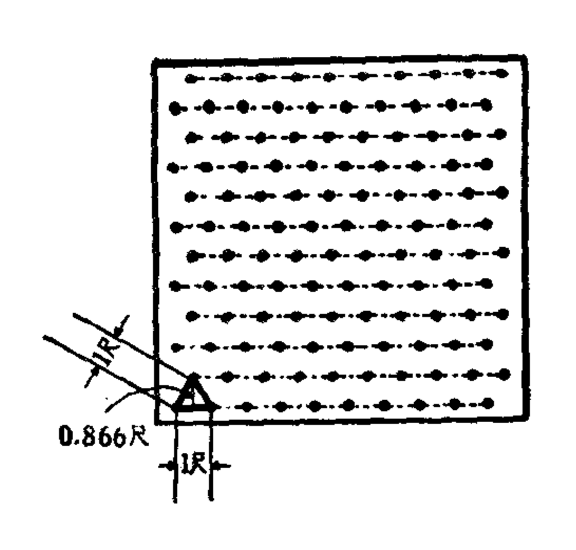
有 9 个间隔，所以每行只长 9 尺，也就是说，只种了 9 尺见方的一块地，每边还各剩下 4 寸 5 分。




社员们一想，余地没有很好利用，怪可惜的。他们又改成对角线方向种(如右图)，每两行之间，相邻两株之间的距离，刚好也等于 1 尺。不过，这时边上只种了 8 株。根据勾股定理，在这种情况下，每一行(或每一列)中相邻两株之间的距离是：$\sqrt{1^2+1^2}=1.414$(尺)。这样 8 株有 7 个间隔，所以边长为 $7\times1.414=9.898$(尺)，几乎排满了那块地，没有什么浪费。因而虽然每一行种的株数少了，但行数多了，整个一块地排得更合理了。数数看，一共种了 113 株，比第一种方法多种 13 株！

社员们还不满足，还想挖掘土地的潜力，他们又想出了第三种种植方法，就是按三角形的样子来种植，每行还是 10 株，每相邻两株之间的距隔仍是 1 尺，只是相邻两行之间的距离缩短(如下页左上图)，但并不影响相邻两株之间要相隔 1 尺的要求。这时，行间距离刚好是以 1 尺为边的等边三角形的高，即

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=0.866(\text{尺})。$$

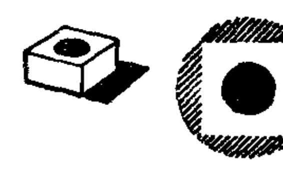



因而使这块地从原来只能排10行的变为排12行了。于是这块地就能种上120株。这时，在左右方向上占用了9个半间隔，每间隔1尺，共9尺5寸，还有余地，在上下方向共11个间隔，每行间隔0.866尺，一共是：0.866×11＝9.526(尺)，也有些余地，既符合相邻两株之间相隔1尺的要求，又不显得拥挤，而且多种了20株树苗。

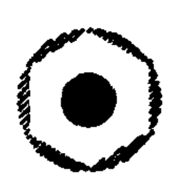
## 为什么机器上用的螺母总是六角形的？

螺母(俗称螺丝帽)总是六角形的，大家已经很习惯，一点也不感觉到奇怪。

可是仔细想一想，问题就来了，螺母为什么一定要做成六角形的呢？四角形的、八角形的不也很好吗？

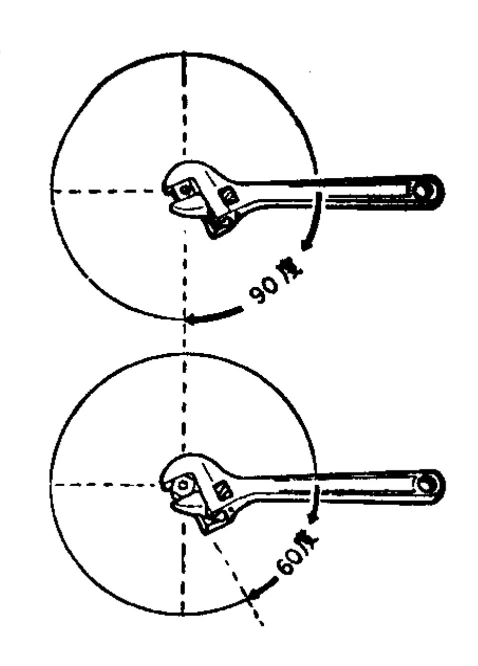






对于这个问题，我们遵循毛主席教导的：**“认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。”**因此必须放在生产实践中去考察。

把螺母做成六角形，是为了使用方便和最大限度地利用材料。在机器上，安装螺母的地位，有时候并不总是很宽裕的，甚至拧螺母的扳手活动的地方都是有限的。六角形的螺母，每次只要把扳手扳动60度，就可以逐渐把螺母拧紧。而四角螺母就需要每次扳动90度，这就是说，为了拧紧螺母所需要留出的地方，六角螺母比四角螺母要少三分之一。至于八角螺母，虽然拧动的角度可以更小，但是八角螺母因为扳手与它的接触面小，容易打滑，一般极少使用，所以六角形螺母使用起来最方便。



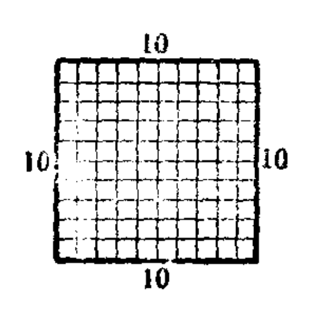

螺母通常是由圆形的棒料铣制出来的，同样的一根圆棒，用它来做六角螺母要比做四角螺母少切掉一些金属，所以用同样粗细的圆棒所做出来的六角螺母，要比四角螺母来得大。从强度上来看，大的螺母总是比小的要坚固得多，也就是说最大限度地利用了原材料。

你再看看扳手，一般扳手的柄与扳口都成为30度的交角，这样当安装螺母的地方非常狭窄，扳手不能自由活动时，那么只要将扳手扳动一下螺母，然后把扳手翻过来再扳一下螺母，这样反复地扳几次，就把螺母拧紧了。

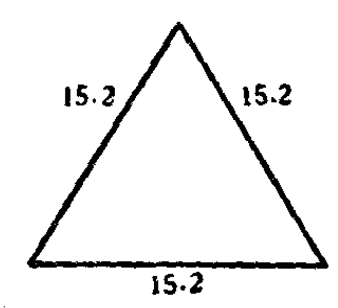
# 为什么热水瓶、玻璃杯、汽油桶、抽水管等都是圆柱形的？

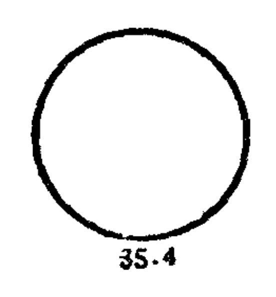
热水瓶、玻璃杯、汽油桶、喷雾器的药液筒、抽水管等都是装液体的容器。平时你注意过没有，装液体的容器，往往都是圆柱形的，这有没有数学方面的道理呢？有的。

毛主席教导我们："**要节约闹革命**"，我们生产一件容器，都希望能用最省的材料，来装一定的体积的液体；或者说，用同样的材料，要使做成的容器的容积尽可能大些。




在中学数学里，我们学到计算圆面积和一些正多边形的面积或周长的方法。譬如：一个面积为 100 平方厘米的正方形的周长是 40 厘米；而同样面积的正三角形的周长约等于 45.6 厘米；而同样面积的圆的周长只有 35.4 厘米。这就是说，面积相同时，在圆、正方形与正三角形等图形中，正三角形的周长最大，正方形的周长较小，圆的周长最小。所以装同样体积的液



体的容器中，如果容器的高度一样，那么侧面所需的材料就以圆柱形的容器最省。因此热水瓶、玻璃杯、汽油桶、喷雾器的药液筒、抽水管等装液体的容器，大都是圆柱形的。

有没有比圆柱形更为省料的形状呢？有的。根据数学的原理，用同样大小的材料做的一些容器中，球形的容器的容积要比圆柱形的更大。也就是说，做球形的容器，可以更节约材料。但是，球形的容器很容易滚动，放不稳，它的盖子也不容易做，所以不实用。

放固体的容器，如盒子、箱子、柜子等，为什么不做成圆柱形的呢？虽然做圆柱形的容器比较省料，但是装起固体东西来却不经济，所以通常把它们做成长方体的。

这里我们看出，必须“**对于具体情况作具体的分析**”，当我们研究一些有关最大值、最小值的数学问题时，不但要从数学理论上来考虑，更重要的是必须注意它在生产和生活上的实用意义。

## 为什么烟囱要做成圆台形？

我们走进工厂区，可以看见矗立着的许多高大的烟囱。人们总是以“林立的烟囱”来形容工厂的稠密。

你想过这个问题没有：为什么烟囱一般都是做成上面细、下面粗的圆台形？为什么烟囱的口径要做成圆形的呢？

因为烟囱的排烟量与烟囱口径的面积成正比。而圆有这么一个有用的特性：同样周长的平面图形中，以圆的面积为最大。因此，当材料一定时，只有把烟囱的口径做成圆形，才能使烟最畅通地冒出来。

或者说，为了使烟囱口径保持一定的面积，只有把口径做成圆形，才最省材料。

这就是烟囱一般都做成圆台形的数学理由。

还有一个重要的原因。你总知道，伸得高高的烟囱，特别在上半段，会受到很大的风力，把烟囱做成圆台形之后，就可以使烟囱受到的风力影响减弱。另外，由于烟囱下部受到的压力较大，下部需做得厚些，而圆台形是比较稳固的。还有，做成圆台形也便于清除烟囱内壁的积垢。

当然，有些小型工厂、手工作坊、饲养场等处，只需要小型的不太高的烟囱，那么，为了建造方便，有时也把口径的形状制成方的。

## 为什么圆柱形氨水池底的直径要与高相等？

某生产队要建造一只能放150担氨水的圆柱形氨水池。当地贫下中农遵照伟大领袖毛主席关于“**厉行节约、反对浪费**”的教导，在建造前，先计算一下这个氨水池的底半径和高应取多少，才能使用料最省（氨水池有盖子）。

设圆柱形氨水池的底半径是$r$，高为$h$，那么这个氨水池上下底的面积与侧面积的总和是

$$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot h$$

现在的问题就是当$r$与$h$取怎样的值时，才能使用料最省，也就是使$S$为最小。因为所要建造的氨水池的体积是固定的，用$V$来表示这个体积，那么

$$\pi r^2 h=V \qquad (\text{I})$$

于是 $$S=2\pi(r^2+rh)=2\pi\left(r^2+\frac{V}{\pi r}\right)$$

$$=2\pi\left(r^2+\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}\right)。$$

因为括号中三项都是大于零的数，我们知道当它们的积为定值时，要使它们的和为最小，只有当三项彼此相等时才可能。现在 $r^2 \cdot \frac{V}{2\pi r} \cdot \frac{V}{2\pi r} = \frac{V^2}{4\pi^2}$ 是个定值，所以当 $r^2 = \frac{V}{2\pi r}$ 时 $S$ 最小。代入（I）得到

$$h = 2r$$

由此可见在建造氨水池时，取底面的直径与高相等可以使用料最省。贫下中农正是按照节约闹革命的精神来建造氨水池的。

因为已知氨水的比重是 0.925 吨/米$^3$，所以

$$0.925\pi r^2 h = 7.5 \qquad \text{将 } h = 2r \text{ 代入}$$

从而解得 $r \approx 1.1$ 米，

$h \approx 2.2$ 米。

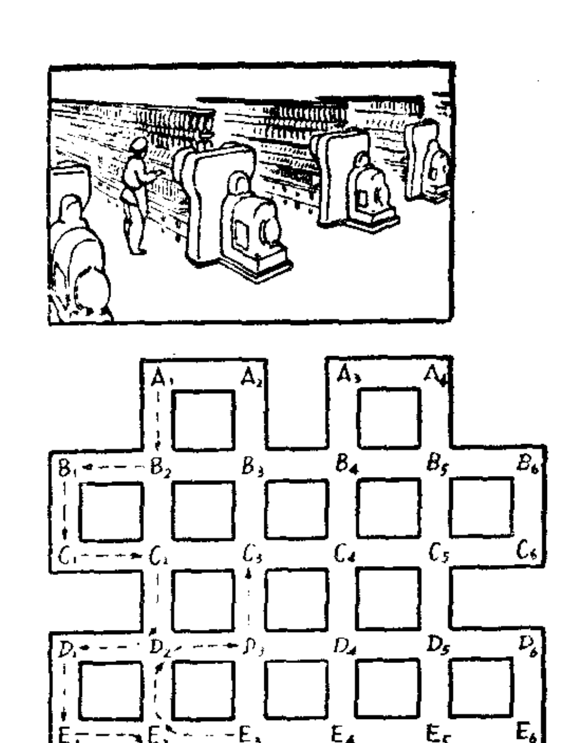
根据上边所说的道理，如果某生产队要造一个无盖的圆柱形粪池，要求用料最省，那么这个粪池的高和底的半径有怎样的关系呢？请你算算看。

## 什么是“一笔画”问题？

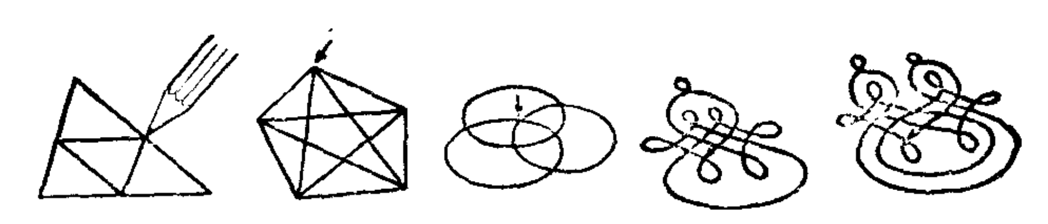
在纺织工厂里，纺织工人在车间巡回，每天要来回走很多趟，但她们能从任意一点出发，不重复地走过所有的走道，而最后又回到出发点。如果某一工人所负责的区域如

右图，你看她走的线路是怎样的？

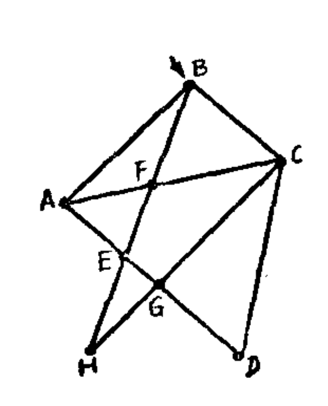
这个问题的解决，可以归结为一个中国古老的数学问题——“一笔画”的问题。什么是“一笔画”呢？就是由某些点和线段所组成的各种图形，问这些图形能不能不重复地一笔画成。




下面的图形都可以一笔画成。



再看看左下图的任意两点，都可以用若干线段把它们连结起来，这样的图形称为连通的。这种图形中的许多点，可以分成两类：凡是从这个点出发的线段的数目是奇数的，




称为奇点（如左图中的 $A$ 点和 $B$ 点），如果从这个点出发的线段的数目是偶数的，称为偶点（如图中的 $C$、$D$、$E$、$F$、$G$、$H$ 各点）。从各式各样的这类图形看来，我们可以知道，凡是能够一笔画成的图形，

只有两种情况:

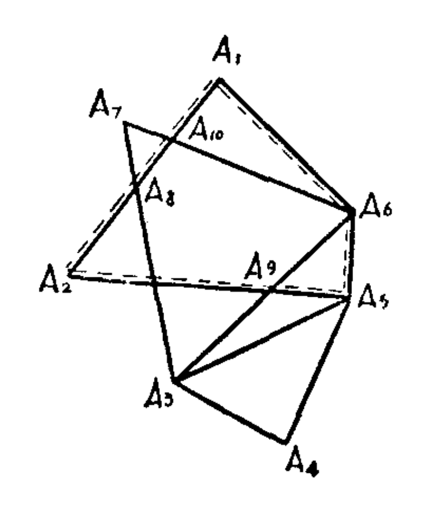
1．图形中的所有的点都是偶点，就可以从图形的任意一点出发，不重复地把图形一笔画出，而且最后仍回到出发点。

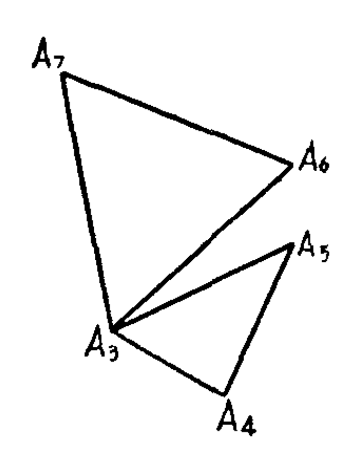
2．图形中只有两个奇点的，这时可以从其中一个奇点出发，把图形不重复地一笔画出，最后回到另一个奇点。

如果图形中奇点的个数多于两个，就不可能把图形不重复地一笔画出。

为什么这两种图形可以一笔画出呢?

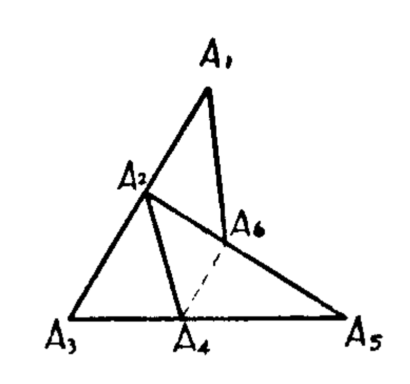
我们先来看第一种情况，图形是连通的，而且没有奇点，如左面的第一个图就是这样的图形。从这个图形的任意一点出发，可以划一条闭回路出来，最后还是回到出发点。例如，从 $A_1$ 出发、经 $A_2$、$A_5$、$A_6$ 最后回到 $A_1$（如图上虚线划出的部分）。现在我们把这一部分擦去，留下的部分如左下图所示，这个图形仍旧只有偶点而没有奇点。因此它也可象上面一样找到闭回路，例如找出 $A_6$、$A_7$、$A_3$、$A_6$ 这一条闭回路。又因为 $A_6$ 这一点在原来的闭回路中也是有的，因此可以把后面一条闭回路接到



前面一条闭回路中去，得到这样一条大的闭回路：$A_1$、$A_2$、$A_5$、$A_6$、$A_7$、$A_3$、$A_6$、$A_1$（画出来的部分就是接上去的闭回路）。下面就可把这一条闭回路擦去，又在留下的部分中找闭回路，再接到上面的闭回路中。这样下去，可以把整个图形接成一条闭回路，也就是可以把图形一笔画出，而且出发点和终点是一致的。

现在就能很容易地说明第二种情况了。即图形是连通的，而且只有两个奇点。如下图，只有 $A_4$、$A_6$ 两个点是奇点，其余点都是偶点。我们只要在两个奇点之间添一条线，它们也都变成了偶点，这就成了第一种情况了。于是可以把这个图形一笔画出，并且假设第一笔画的就是添上去的那根虚线。如在右图上的情形是：$A_6$、$A_4$、$A_2$、$A_1$、$A_6$、$A_5$、$A_4$、$A_3$、$A_2$、$A_6$。再把第一笔去掉，就把原来的图形一笔画出了：$A_4$、$A_2$、$A_1$、$A_6$、$A_5$、$A_4$、$A_3$、$A_2$、$A_6$。




到这里我们可以很容易地解决开头提出来的一问题了。因为车间走道所成的图形是连通的，而且交叉点全是偶点，因此要不重复地走过所有走道，而最后回到出发点是可能的。其中的一种走法是：

$A_1$、$B_2$、$B_1$、$C_1$、$C_2$、$D_2$、$D_1$、$E_1$、$E_2$、$F_1$、$F_2$、$E_3$、$E_2$、$D_2$、$D_3$、$C_3$、$C_2$、$B_2$、$B_3$、$C_3$、$C_4$、$D_4$、$D_3$、$E_3$、$E_4$、$F_3$、$F_4$、$E_5$、$E_4$、$D_4$、

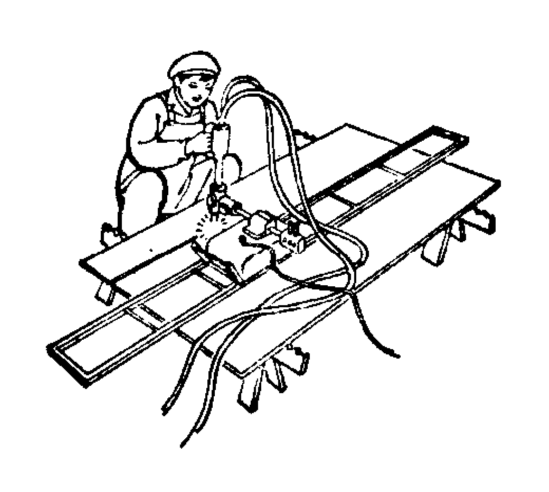
$D_5$、$D_6$、$E_6$、$E_5$、$D_5$、$C_5$、$C_4$、$B_4$、$B_5$、$B_6$、$C_6$、$C_5$、$B_5$、$A_4$、$A_3$、$B_4$、$B_3$、$A_2$、$A_1$。

其实还有很多种走法，你不妨试一试。

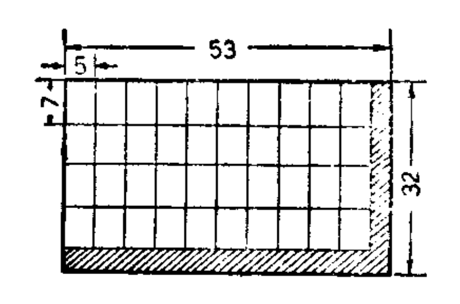
## 如何做好"巧裁缝"？

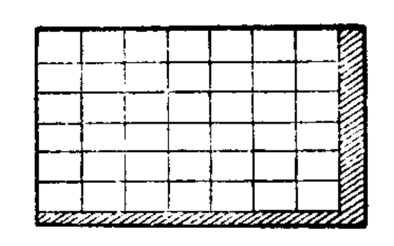
毛主席教导我们："**要使我国富强起来，需要几十年艰苦奋斗的时间，其中包括执行厉行节约、反对浪费这样一个勤俭建国的方针。**"

商业系统的职工，按照毛主席的教导，他们想了一切办法，把能用的布料都利用起来，譬如原来一个普通身材的人做一套衣服，需用布1.5丈，而现在，经过了"巧裁缝"的精心安排，做一套衣服只需用布1.25丈。为了节约这两尺五寸布，巧裁缝们曾花费了多少心血啊！事实上不仅是做衣服如此，在工农业生产的许多场合，也都要发扬"巧裁缝"的精神，以做到物尽其用，尽可能节约原材料。在这些问题中，就需要我们利用数学知识去计算一番。



比如有一块矩形的薄钢板，它的长为53厘米，宽为32厘米，要用它来切取长7厘米、宽5厘米的小矩形作为零件的



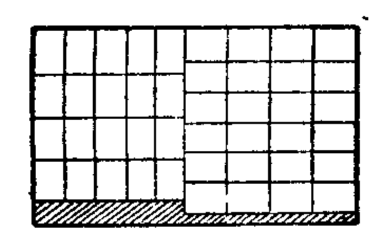


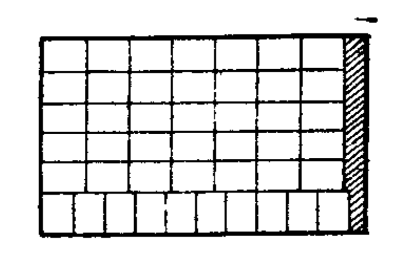
毛坯。问应该怎样切法？你可能要说，这有什么难，只要一块一块紧挨着切过去就行了。其实这里面大有研究呢！比如，把所有的小矩形按照同一方向排列，如左上图把5厘米的一边放在大矩形的长边上，7厘米的一边放在大矩形的短边上，则在长边上可排列10个，在短边上可排列4个，总共排列了$10\times4=40$个，也就是可以切40个零件毛坯，还留下一条宽为3厘米和另一条宽为4厘米的残料。

如果我们把小矩形都换一个方向排列，如右上图，那么长边上可排7个小矩形，短边上可排6个，总共可排$7\times6=42$个小矩形，还留下一条宽为4厘米和另一条宽为2厘米的两条残料。

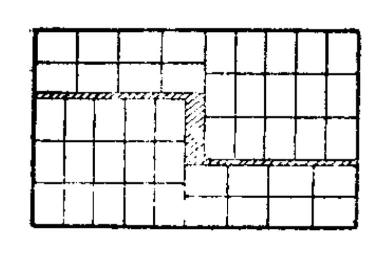
现在让我们来动动脑筋计算一下，怎样才能安排更多的小矩形。因为$53=5\times5+7\times4$，如果沿原材料的53厘米的一边上竖里放5列，横里放4列，那么，原材料的短边上就没有残料留下来了，如下页左上图，这样总共可以切出44个小矩形。

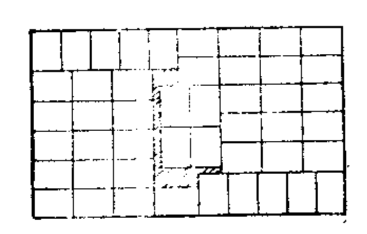
同样，因为$32=5\times5+7\times1$，因此可以沿原材料的短边上横里放5行，竖里放1行，于是原材料的长边上就没有





残料留下来，如右上图，这样总共可安排 45 个小矩形。

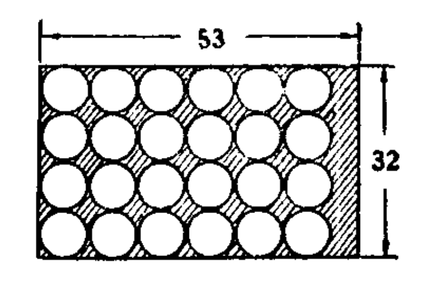


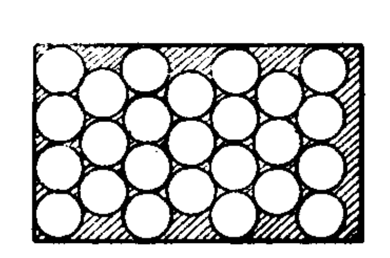


最后，还可以把上面两种安排方法巧妙地结合起来，得到如左面两个图的安排方法，使安排下小矩形增加到 46 个和 47 个。这样，最后一种安排方法最好，它比第一种方法多安排 7 个小矩形，即增加了 17.5%。

如果我们在同样大小的矩形上切下半径为 4 厘米的圆形(加工余量已计算在内)，如果把这些圆正规地一个一个排下去，一共可排 4 行，6 列，总共可切取 24 个圆形，如下面的左图。

我们很容易发现，这样排列法使得中间留下的空隙太大，我们改用一种交错的排列法，如下面的右图，使列与列之间挨得更紧，就可以由原来的 6 列增加到 7 列，但其中

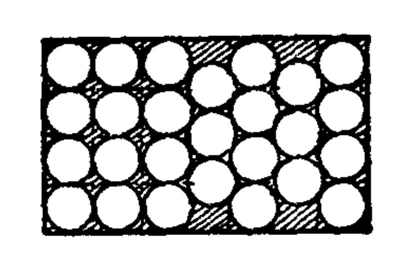


有3列比原来减少了1个。总的来说。可以排25个，比原来增加了1个。

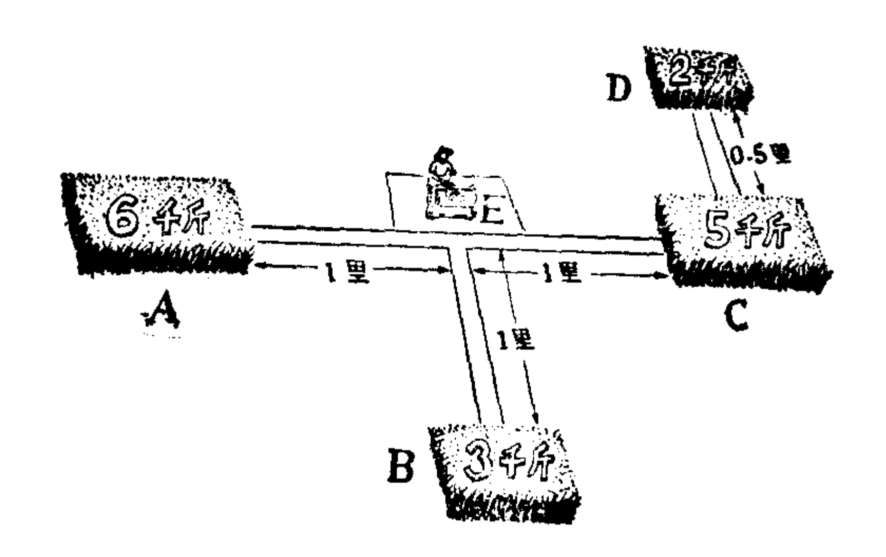
按照上述右图的排法，一方面有三列各少排了1个，另一方面左边还有一条空位置，因此可以把最后一列向左拉，而在前一列里再挤一个进去，如下图，就可以排26个。

由此可见，解决这一类下料问题，并不是单靠拼拼凑凑来解决的。它一定要根据原材料的尺寸以及所要切的矩形或圆的大小，好好地思考一番，计算一番，才能得到最好的下料方案。



## 打麦场应该设置在哪里？

在我国农村里，夏收夏种时期是最紧张的一段时间。一方面，成熟了的夏熟作物（主要是麦子）要及时收割；另一方面，大秋作物又要及时地种下去。工作很多，每项工作的时间性又很强。为了抢时间，许多地方在把麦子割下来以后就在田头设置打麦场，这样能较快地把麦子打下来收藏好。由于种种原因，在每一块麦田里都设置一个打麦场也是不适宜的。实际工作常常需要在若干块比较接近的麦田中间设置一个联合的打麦场。但是，这个打麦场的位置应该选择在哪里，才使得把所有麦子运到这个打麦场最为省




力呢？例如：在 $A$、$B$、$C$、$D$ 四块麦田中，它们的麦子数量分别为 6,000 斤、3,000 斤、5,000 斤、2,000 斤。图上的直线表示麦田间的道路，$E$ 点为道路间的交叉点。麦田之间的距离在图上注明了，如 $AC$ 之间的距离为 2 里，$CD$ 之间的距离为 0.5 里等等。如果把打麦场放在 $C$ 点，那么 $A$ 处有 6,000 斤麦子要运到 $C$，$AC$ 之间的距离是 2 里。我们知道，运输的工作量是与运输所经过的路程和运输的数量成正比的。如果把 1 千斤重的东西运走 1 里路，作为所花运输力量的一个单位，这单位简称为“千斤里”。那么，把 $A$ 处的麦子运到 $C$ 要花费 $6\times2=12$ 个“千斤里”。同样，把 $B$ 处的麦子运到 $C$ 要花 6 个“千斤里”，把 $D$ 处的麦子运到 $C$ 要花 1 个“千斤里”。因此，如把打麦场设在 $C$ 点，全部的运输力量为 $12+6+1=19$ 个“千斤里”（我们设 $C$ 点本身的麦子不必花什么运输力量）。如果把打麦场设在 $E$ 点，则总共所花的运输力量为 $6+3+5+3=17$ 个“千斤里”。可

见$E$点比$C$点要好一些。现在要问究竟哪一点最好？如何求出这个最好的点呢？

我们利用数学方法，可以得出决定这个点的几条规则：

1．首先可以把最好的麦场位置限制在麦田或道路的交叉点中。如图中最好的麦场位置，一定要在$A$、$B$、$C$、$D$、$E$五个点中找到；

2．如果某块麦田的麦子数量占了总数的一半以上，这块麦田本身就是最好的打麦场的位置；根据这个原则，如果只有两块麦田联在一起，就在产量多的一块麦田设置打麦场最好，这叫做“小往大靠”；

3．如果某一块麦田是一个“端点”，即它只有一条道路与其它麦田相连，图中的$A$、$B$、$D$都是“端点”，假定这个端点的麦子数量不超过总数的一半，就可以把这块麦田的全部麦子搬到邻近的点，在这基础上继续找最好的麦场位置，这叫做“支往干靠”。

根据上面三条规则，寻找最好的麦场位置的方法是：先看“端点”麦田，如果它的数量超过了总数的一半，则打麦场就可设在这里；否则，把它的麦子搬到邻近麦田（或道路交叉点）而使点的数目减少一个；例如：可把图中$D$点的2,000斤麦子搬到邻近的$C$点，取消$D$点，而$C$点有了5,000斤＋2,000斤＝7,000斤。再看新图形的端点，这样继续下去，就可以找到最好的麦场位置。

上面的方法，可以归结为下面几句口诀：

要把麦场找，

先看“端点”麦子有多少；

如果占大半，

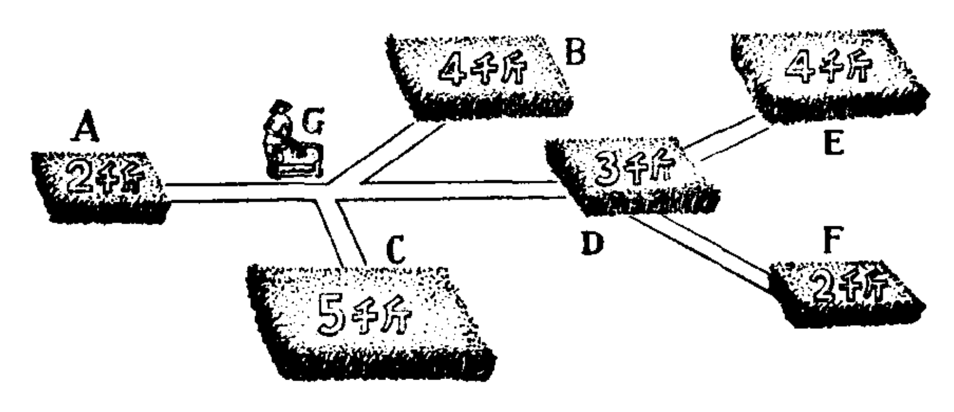
麦场在此妙；

如果是小半，

把它往里靠。

现在我们来看看这个问题里的例子，麦田$A$是一个“端点”，而这一点的数量是6,000斤，不足总数的一半，因此应该把它搬到邻近的$E$点。再看$B$也是一个“端点”，它只有3,000斤，因此也应该把它搬到邻近的$E$点。这样，在$E$点就有9,000斤了，超过了总数的一半，因此，$E$点是一个最好的麦场位置。

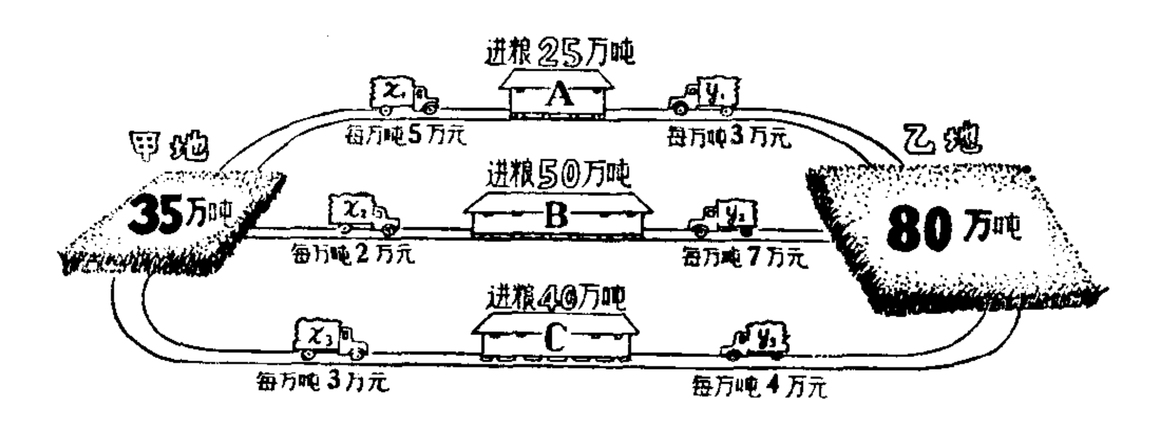
再看看下面的六块麦田，最好的一个麦场位置应设在哪里？$A$、$B$、$C$是三个“端点”，每块麦子的数量都不足总数的一半，因此都要搬到邻近的$G$点，这样$G$点就有11,000斤，超过了总数的一半，所以最好的麦场位置应设在$G$点。



# 如何调运粮食，使运费最省？

甲、乙两地都是产粮区，甲地每年可调出粮食 35 万吨，乙地每年可调出 80 万吨。而 $A$、$B$、$C$ 三地每年需调进粮食分别为 25 万吨，50 万吨，40 万吨。由于这些地区之间的距离、运输条件不同，运费也各有高低。现将这些地区的运出、运入数量，及它们之间的运费列表如下：

| 运费（万元/万吨）＼运进地点<br>运出地点 | $A$ | $B$ | $C$ | 运出数量（万吨） |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 5 | 2 | 3 | 35 |
| 乙 | 3 | 7 | 4 | 80 |
| 运进数量（万吨） | 25 | 50 | 40 | |




这里对运费补充说明一下，从甲地每运一万吨粮食到 $A$ 地，需运费 5 万元；从乙地每运一万吨粮食到 $B$ 地，需运

费 7 万元，等等。

如果先不考虑运费问题，就很容易制订出调运的方案：从甲地运 25 万吨到 $A$，余下的 10 万吨运到 $B$，再从乙地运 40 万吨到 $B$，运 40 万吨到 $C$，调运工作就完成了。如果要考虑运费的话，计算一下这样调运所花的总的运费为

$$5\times 25+2\times 10+7\times 40+4\times 40=585\text{(万元)}。$$

如果要使总的运费最省，就要好好想一想了。我们设从甲地调运到 $A$、$B$、$C$ 的数量分别为 $x_1, x_2, x_3$，从乙地调运到 $A$、$B$、$C$ 的数量分别为 $y_1$, $y_2$, $y_3$，这些量应该满足下列关系式：

$$x_1+x_2+x_3=35$$

$$y_1+y_2+y_3=80$$

$$x_1+y_1=25$$

$$x_2+y_2=50$$

$$x_3+y_3=40$$

最后还要求总的运费 $5x_1+2x_2+3x_3+3y_1+7y_2+4y_3$ 达极小值。这个问题是“线性规划”中所研究的基本问题。解决的结果是：$x_1=0$，$x_2=35$，$x_3=0$，$y_1=25$，$y_2=15$，$y_3=40$。也就是：把甲地的 35 万吨粮食全部运到 $B$，$B$ 地不足之数（15 万吨）由乙地运去，乙地余下的 65 万吨分别运给 $A$，25 万吨，运给 $C$，40 万吨。这是一个最好的调运方案，用这种方案所花的总的运费为

$$2\times35+3\times25+7\times15+4\times40=410(\text{万元})。$$

比第一种调运法节约了 175 万元，即节约了将近 30% 的运费。

根据上面所提出的几个问题，可以看到“线性规划”这个新型的数学方法，在工农业生产、交通运输等方面有很多应用，但过去某些资产阶级学术“权威”却诬蔑它“低级”、“没有数学味道”，妄图阻挠这一数学方法为社会主义建设服务。我们要批判这些谬论，坚决同工农兵相结合，走联系生产实际，为社会主义建设服务的道路。

## 为什么用“统筹方法”可以加快工程的进度？

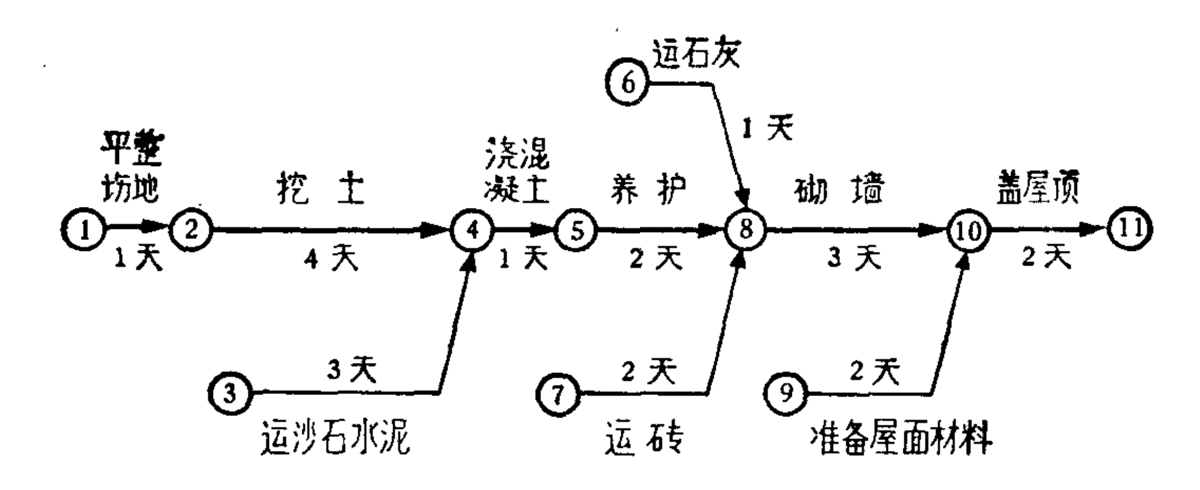
我们在伟大的社会主义建设事业中，有些工作规模很大，需要几百人、几千人甚至几万人共同来完成。有的工程，它的项目很多，它们之间的关系也很复杂，有时简直是千头万绪。例如：原子弹、氢弹的爆炸，第一颗人造地球卫星的发射，南京长江大桥的建成等都是这样。就拿一个比较普通的工程来说，比如要造一幢工人住宅，先要做好各种准备工作（如选定地点、设计、准备原料材料和工具设备等），正式施工以后，又有许多工作项目，如清理场地、打桩、做地

基、砌墙、吊装屋梁、造楼板、盖屋面、装门窗、水电安装、内外装饰等。这还是分得较粗的，如要分得细一些的话，可以有一百多个项目。这些项目之间又有一定的次序关系，如：不做好地基就不能砌墙；不砌好墙就不能吊装屋梁、造楼板等。造一幢房子还不是最复杂的。有些大的工程，工作项目成千上万。这时如果事先有了全面而周密的计划安排，那末，工程就可以顺利进行下去，并且能够多、快、好、省地完成施工任务。相反，如果事先计划安排不当，有时，在有的地方会显得很忙乱；而有的地方又出现窝工等待的现象。这样就会推迟工程的进度，又浪费了人力物力。

现在我们通过一个例子，来介绍一个帮助我们作好计划安排的科学方法——统筹方法。

某中学的革命师生在教育革命实践中，批判了修正主义教育路线，他们遵循伟大领袖毛主席关于“**教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合**”的教导，在工人老师傅带领下，自己动手建造了一间厂房。在建厂过程中，他们运用了统筹方法来安排工作，加快了工作的进度，提前完成了建厂任务。

首先，他们向有经验的老师傅请教，知道完成这个任务有以下几项具体工作：平整场地、挖土、运沙、石、水泥，浇混凝土地基，等混凝土干(养护)，运石灰、砖头、砌墙、准备屋面材料、盖屋顶。根据这些工序(工作)所需要的时间，以及




工序先后次序的逻辑关系，可以画出箭头图。

其中每一支箭头代表一项工作，箭的上方写上所要做的工作，箭的下方写上完成这项工作所需的时间。这个箭头图也称为“工序流线图”。

根据工序流线图，把所有从起点顺着箭头方向到终点的路线写出来，并计算出总共所需要的时间。

这个图上共有五条线：

①—1→②—4→④—1→⑤—2→⑧—3→⑩—2→⑪　13 天

③—3→④—1→⑤—2→⑧—3→⑩—2→⑪　11 天

⑥—1→⑧—3→⑩—2→⑪　6 天

⑦—2→⑧—3→⑩—2→⑪　7 天

⑨—2→⑩—2→⑪　4 天

其中所需时间最长的是 13 天，这条线我们就称为主要

矛盾线(即图中的粗线)。也就是说，建造厂房所需要的时间为13天。

从这个例子可以看出主要矛盾线有这样的性质：这条线上的每一项工作如能提前一点时间的话，就可以使整个工程提前完工。相反，如果在这条线上的工作耽误了时间的话，整个工程就要延迟完工。这个中学的革命师生在工人老师傅带领下，合理安排了劳动力，发扬了冲天的干劲，提前二天完成了挖土任务，因此，他们只用了11天就提前完成了建厂任务。这里我们容易看出，当主要矛盾线上的时间缩短后，矛盾就可能转化，使非主要矛盾转化为主要矛盾。

假如挖土能提前2天半完成的话，那末，原来主要矛盾线上的时间为10天半，而第二条线上所需的时间为11天，在这时矛盾则发生转化，这条非主要矛盾线就转化为主要矛盾线了！

我们在社会主义建设事业中，必须以“**只争朝夕**”的革命精神，抢时间、争速度。无论是一个工厂企业的建造，一项新产品的试制，一项设备的抢修，都希望尽可能提前完成任务。那么，怎样加快工程进度呢？用马列主义、毛泽东思想武装群众，激发广大群众的积极性。另外，如果再加上科学的计划管理，就更可以加快工程的进度。比如，我们画出了工程的工序流线图，找出其中的主要矛盾线后，领导上就

要尽可能加强主要矛盾线上的工作，在可能范围内以人力物力支援它。相反不应在非主要矛盾线上浪费太多的人力物力。所以在统筹方法中有“向主要矛盾线要时间，向非主要矛盾线要节约”的口号，当然，我们向主要矛盾线要时间的同时，也还是要注意节约闹革命的。

总之，利用统筹方法可以帮助领导上统筹全局，全面安排；也可以使群众了解工程的全貌以及自己的工作在整个工程中的地位和作用，利于调动群众的积极性。所以它在我国的社会主义建设事业中还是能发挥很大作用的。

## 怎样提高机床利用率？

人们在上班、下班时，在车站上等汽车、电车，常常要排队、挨次序上车。除了这种排队现象以外，其实还有一些无形的排队现象。譬如我们在打电话的时候，常常有“打不通”的现象，其中一个原因就是因为你所要用的这条线路别人正在用，你只好等别人用完后再用。这种现象在打长途电话中更为显著。常常有好多人同时等着用同一根线路，他们在不同的地方排着无形的队伍等待着。又如一个工人负责检修六台机器，如果其中三台同时发生故障，他只能一台一台地来修理，而其余两台只好“排队”等候了。一般来说，我们总希望队排得短些，排队等候的时间也短些。人们排

队的时间长了，要影响工作和休息；机器"排队"的时间长了，要影响生产。

要减少等候汽车、电车的时间，就需要增调若干辆车子；要减少机器等待修理的时间，就要增加一些检修工人。但是，车辆增加得过多，车子里经常空着也是浪费。如果检修工人增加得过多，又造成劳动力的浪费。究竟怎样才能"恰到好处"？这是运筹学中"排队论"里所研究的问题。

例如：在一个车间中有 60 台自动化的金属切削机床。这些机床在正常情况下可以不用工人照顾而自动运转。但是在某些情况下它还是需要工人去照顾。比如，一根原材料用完了，需要换一根上去；车刀损耗了，需要重磨；工夹具需要调整等等。我们不妨把这些情况一律称为"故障"。一发生"故障"，机床就停下来需要工人去处理。究竟派多少工人去管理这 60 台机床才合适呢？

我们先要弄清楚，每一台机器什么时候发生故障，发生什么样的故障，是由很多具体因素决定的，因而也是不能预先知道的。因此，有的时候，所有机床都在正常运转，这时候管理工人就空闲下来没有事情干；有的时候，又可能有好几台机床同时发生"故障"，使工人来不及应付，而产生了机器排队等待的现象，现在，我们把一个工作日中机床正常运转的时间与工作日的总时间的比，称为机床利用率，即：

$$机床利用率=\frac{机床正常运转时间}{工作日的总时间}。$$

设一个工作日的总时间为 8 小时，机床正常运转的全部时间为 7 小时，那么机床利用率为

$$\frac{7}{8}=87.5\%。$$

把工人在一个工作日中处理“故障”的时间，与工作日总时间的比，称为工人繁忙率，即：

$$工人繁忙率=\frac{工人工作时间}{工作日总时间}。$$

例如：设工作日的总时间为 8 小时，处理“故障”所花的时间为 6 小时，那么工人繁忙率为

$$\frac{6}{8}=75\%。$$

由于机床利用率和工人繁忙率，都同一个工人所照顾的机床的台数有关。工人管理的机床的台数愈多，工人繁忙率愈高；但是另一方面，工人照顾不过来的时间也就愈多，因此机床利用率也就要降低。到底这个车间中的 60 台自动化机床，要几个工人去管理比较合适呢？当然，这要根据很多具体条件而决定，如机床发生“故障”的可能性的大小，处理“故障”的时间的长短，等等。假定根据一个时期的实际统计，知道派 6 个工人去管理，每人管理 10 台机床，这时机床利用率为 90%，工人繁忙率为 75%；如果安排 7 个工人，平

均每人管理 8.6 台机床，那么机床利用率提高到95%，工人繁忙率降低到68%。两者比较究竟哪一个好？后者比前者多用了一个工人，但提高了 5% 的机床利用率，也就是说，每台机床在每个工作日中可多工作 $8\times5\%=0.4$ 小时，60台机床总共可多工作 24 小时，即相当于多增加了3台机床。在一般情况下派 7 个工人去管理，要比派 6 个工人好些。

总之，这个问题，要根据种种实际条件，再通过一定的数学计算，来找出比较经济合理的方案。

## 什么是优选方法？

在日常生活中，我们常常要碰到选择最好方案的问题。例如：一枝粉笔做成多长最好？每枝粉笔用到最后都要丢掉一段一定长的粉笔头，单就这一点来说，粉笔做得越长越好。但是，太长了容易折断，每断一次就要浪费一个粉笔头，这样反而不好；而且太长了，使用起来也不方便。粉笔到底做多长为最好的问题，就是一个“优选法”的问题。

在生产斗争和科学实验中，更是经常遇到这类问题。如生产某种产品时，怎样选取合适的配方，合适的操作条件，使得产品的质量好、数量多、而成本最低？这就要找出配方、生产条件与产品质量和数量之间的规律，需要做一系列的实验。

比方说，炼钢时需要加一定量的碳，加多了成为生铁，加少了成为熟铁，都不成钢材。又如炼某种合金钢，需要加入某种化学元素，究竟每吨加多少最好呢？假定依据生产经验，已经估计出应该加入的量在1,000克到2,000克之间。那么，最好的加入量是多少克呢？这就得做试验。试验的方法很多，如果从1,001克开始，每间隔1克做一次试验（即分别取1,001克、1,002克……2,000克进行试验），比较这一千次试验的结果，选出使钢的强度最高的化学元素的数值，这种安排试验的方法，称为“均分法”。可是这种方法既浪费时间，又浪费原材料，而且有时还不一定能做到。就拿炼钢的例子来说吧，除了某种元素的加入量以外，还要考虑炼钢的温度，譬如说，在2,000°C～3,000°C之间，每隔40°C要做一次试验，就得进行25次试验。两个因素一起考虑，就要做1,000×25＝25,000次试验。如果一天做7次试验，一个月做210次，一年做2,500次，十年才能做完这些试验。事实上，用“均分法”做这些试验是不可能的。

毛主席教导我们：“**人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。**”工人老师傅在长期生产斗争中，积累了丰富的经验，找到了许多安排试验的好方法。这里介绍的一种优选方法，工人老师傅称它为0.618法（或称折纸法）。这种试验方法能以尽可能少的试验次数，迅速找到生产上的最佳方案。也就是说，能够以比较少的

试验次数，找到合适的配方，合适的操作和工艺条件，使得产品质量好，而数量多。

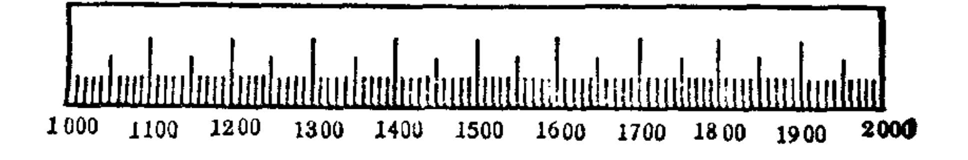
对于一个因素的问题，用折纸法做16次试验，可以抵上用“均分法”做2,500多次的试验，这就大大节约了人力和物力。

实践证明，用这种优选法来安排试验，选择合适的生产条件，进行新产品的试制，以及在质量达到要求的情况下，降低某种原料的用量等方面，都取得了有效的成果。

## 怎样用“折纸法”做试验？

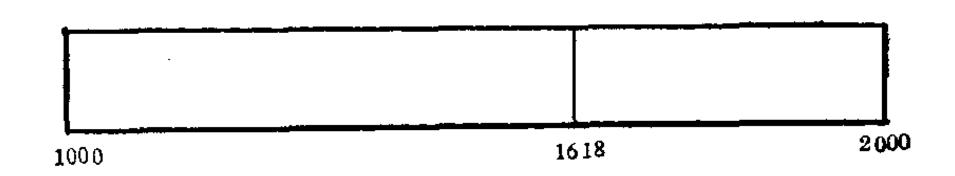
优选法就是把数学的方法运用于生产，对生产中所遇到的矛盾，通过尽可能少的试验，找到最好的方案来给予解决。现在仍以炼钢为例，用“折纸法”应该怎样做试验呢？这种方法要用到一个数——0.618，请大家先记住它。

我们知道，炼钢需要加入某种元素来增加它的强度。根据经验，已估计出每吨钢的加入量在1,000克到2,000克之间。我们以此作为试验范围，拿一张有刻度的纸条表示1,000克——2,000克，如下图所示。



我们在纸条的1,618处划一条线，1,618这一点，实际上就是这张纸条长度的0.618倍；用算式表示，即

$$1,000+(2,000-1,000)\times 0.618=1,618。$$

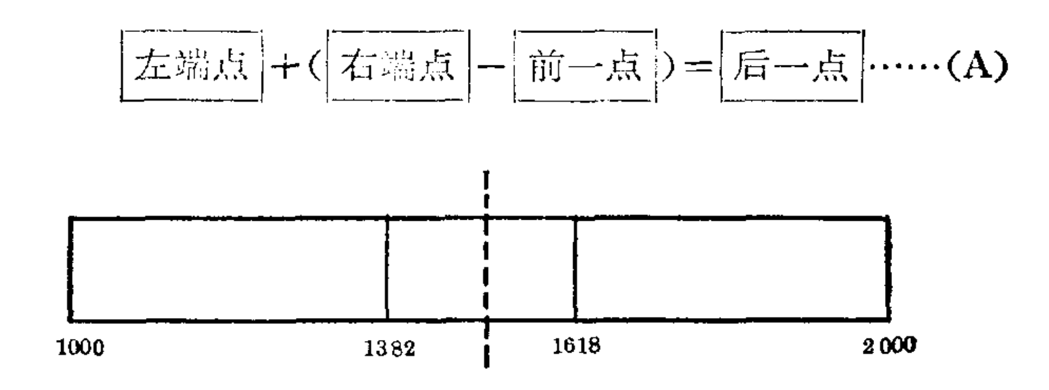



我们取1,618克化学元素加入一吨钢中做一次试验。然后把纸条对折起来，前一线（1,618）落在另一层的地方（即1,382处），再划一条线。显然这两条线对于纸条的中点是对称的。数值1,382可以由下式计算出来：

$$1,000+(2,000-1,618)=1,382。$$

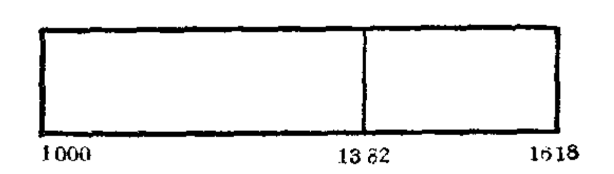
这个算式一般可写为

左端点 +（右端点 − 前一点）= 后一点 ……(A)



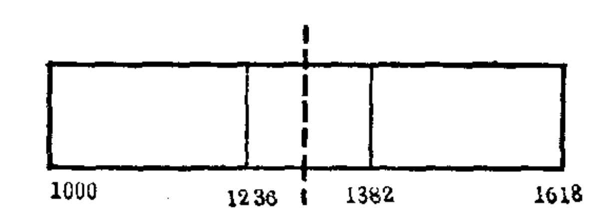

我们再取1,382克化学元素加入一吨钢中，再做一次试验。

**"有比较才能鉴别。有鉴别，有斗争，才能发展。"**把两次试验的结果进行比较，假定1,382克的强度比较高，我们就在1,618处把纸条的右边一段剪掉，得下图（如果1,618克

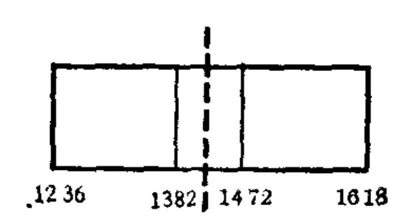



的强度比较高，就在 1,382 处剪掉左边一段）。把剩下的纸条再对折一下，在 1,382 落在另一层的地方划一条线，根据(A)式可以计算出它应在 1,236 处，即

$$1,000+(1,618-1,382)=1,236。$$




按 1,236 克做试验，再和 1,382 克的效果比较。如果仍然是 1,382 克的效果好，就在 1,236 处剪掉左边一段，再对折一下，又可以找到一个点——1,472 处。




按 1,472 克做试验，再进行比较，再剪去一段，等等。这样每次留下的纸条长度是前一次长度的 0.618 倍。这样一次又一次地试验、比较，逐步接近最好的加入量，直到达到我们的要求为止。

在使用这种方法时，试验的范围是很重要的，这要根据

经验，或已有的资料作出估计。当然有时候估计得不一定正确，可能最优点在估计的范围以外，在这种情况下做试验时，“好点”必然逐个向右端点（或者左端点）靠近。如出现这种情况，我们在做过几次试验后，可直接在右端点（或左端点）做一次试验。若右端点（或左端点）的试验效果好，就必须向右（或向左）扩大范围，再进行试验，直到达到目的为止。

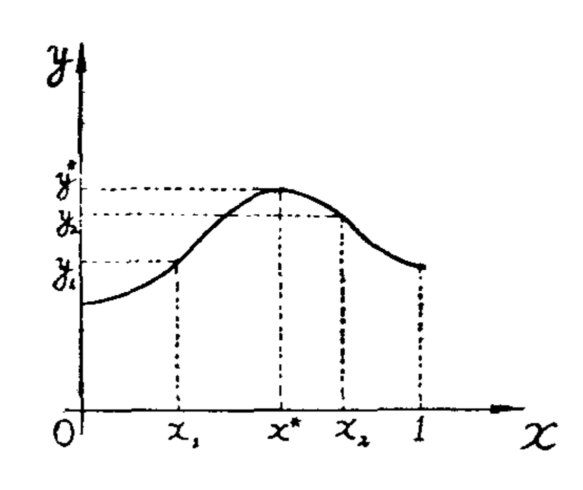
上面介绍的是单因素问题的优选方法，但在许多实际问题中，往往有几个因素需要同时考虑。例如：炼高强度合金钢，不仅要确定加多少量的某种化学元素，还要确定操作时的温度，这就是双因素问题。其他还有包含更多因素的问题。对于这类多因素问题，可用类似办法进行折纸法试验，这里不予介绍了。

## 用“折纸法”做试验时，为什么要用数0.618？

我们用折纸法做试验时，要用到一个数——0.618。这个数是怎么来的呢？

人们总是通过实验，来了解生产规律和自然界规律的。在做试验时，经常会遇到这种情况：当影响产品的因素在某

一点时，质量最好，如这种因素的数值减小，指标就下降；因素的数值增大，指标也是下降。反映这种关系的现象，我们称为“单峰”情况。如下图所示，以 $y$ 表示某产品的质量指标，




$x$ 表示影响产品质量的某一因素。因素 $x$ 取值 $x^*$ 时，质量指标 $y^*$ 最好。任选两点 $x_1, x_2$ 做试验时，如果试验结果 $y_1$ 比 $y_2$ 差（即 $y_1 < y_2$），那么把 $x_1$ 左边部分丢掉，这时最好点不会被丢掉。在用折纸法做试验时，比较两次试验后，把差的一段剪掉，其道理也就在这里。

现在的问题是要使试验的次数尽可能少，究竟先做那一点的试验呢？若 $(0,1)$ 线段表示试验范围，用折纸法做试验时，先取一点 $X$ 做试验后，再取一点 $Y$ 做试验，进行比较。由于在做试验时对于那一点好所出现的可能性是一样的，因此丢了 $(0, Y)$ 段和丢了 $(X, 1)$ 段的可能性也是相同的。这就要求两个线段一样长，即

0　Y　X　1

$$Y = 1 - X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

也就是说，$Y$ 是 $X$ 的对称点（对于 $(0,1)$ 线段的中点来说）。

另外，如果丢掉的是 $(X,1)$ 段，留下 $(0, X)$ 段，因为其中 $Y$ 点已做过试验，它与原来 $(0,1)$ 中已做过点 $X$ 的试验相

仿；也就是说，$Y$在$(0, X)$中所处的位置比例，与$X$在$(0,1)$中所处的位置比例是一样的，即

$$\frac{Y}{X}=\frac{X}{1}, \qquad Y=X^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式，得方程：

$$X^2+X-1=0$$

解出方程，取其正根

$$X=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339\cdots\cdots$$

在优选法中的数 0.618 是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值，在做试验时把它作为常数来使用。

在用折纸法做试验时，不论你丢了哪一段，剩下的纸条的长度总是原来纸条长度的 0.618 倍，丢掉的纸条长度是原来纸条长度的 0.382 倍。这个方法也就是将长度为 1 的线段分成二部分，其分点为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；在平面几何学上称它为“黄金分割法”。因而这种“优选法”也可称为“黄金分割法”。